FACILIS, ET UNIVERSALIS
DELINEATIO GEOMETRICA UMBRARUM,

QUAS CORPORA ROTUNDA PRÆSERTIM ARCHITECTONICA VEL IN SEMETIPSIS PATIUNTUR, VEL SIBI INVICEM INFERUNT, VEL ALIUNDE MUTUANTUR, LUMINE A PUNCTO UNICO UBIVIS POSITO DIMANANTE.

DISSERTATIO

LECTA CORAM INSTITUTO SCIENTIARUM

A

I. B. MAGISTRINI

PONTIFICII ARCHIGYMNASII BONONIENSIS SUPERIORIS MATHESEOS PROFESSORE.

BONONIÆ ANNO MDCCCXVI.

TYPIS FRATRUM MASI, ET SOCIORUM

SUPERIORUM AUCTORITATE.

Præstantissimo Hydrometræ, et Architecto S. I. MELCHIONI *Regio pro florentissimis Subalpinis Provinciis Novariensi, et Vercellensi, Gaumello, Lumello, et Viglebano Viarum, et Fluminum Moderatori, cujus difficile numeres præclara, quæ jam sibi condidit, doctrinæ, ingenii, solertiæ, atque integritatis monumenta in Publico, et Privato Civium suorum Patrimonio tuendo, exornando, amplificando;*

Qui Scientiam Aquarum a Guglielminio Bononiæ creatam in schola Taurinensi cum Michelottis excoluit, perfecit, et in Solum Guglielminiæ genti natale ultimo propagavit tum Hydraulica opera stupenda multiplicando, tum, quod haud commune est, melioris ingenii Iuvenes instruendo, imo artis suæ participes faciendo;

Qui Gothorum minutias, tristesque antiquæ vastationis reliquias centum in locis delevit, sanæ Architecturæ usu renovato, dignitate, elegantia, securitate, atque commoditate ubique promota;

Qui per horrida loca regias vias ad lacus, et montes antea fere inaccessos mirabiliter perduxit nova addita utilissimæ societatis facilitate Subalpinos inter opulentos, et Lepontiorum Nepotes adhuc ingenio, morum simplicitate, et fortitudine insignes;

Qui Padi præpotentes impetus quotannis retundit, et finitimos agros, et populosa castella excidio subtrahit;

Qui indocilem Sessitem perpetuo freno regit, furentem sine damno dimittit, placidum, et renidentem per innumera incilia

nova quotidie sagacitate deducit, et in agri Novariensis delicium, et ubertatem convertit;

Qui Ticino, qua rapidissimum est, fundo tenus libellam intulit, et amotis, iterumque restitutis aquis Pontem Romanæ molis miraculo, fere dicas, excitavit;

Hæc schemata, quibus occasionem dederunt dilectissimi Iuvenes Filius ejus Iohannes Antonius, eique carissimus Doctor Franciscus Rasari, Iohannes Baptista Magistrini Civi optime merito, Præceptori humanissimo, Amico incomparabili in perenne amoris, et observantiæ testimonium D. D. D.

I.

Umbra, quam Torus in semetipso generat, lumine a puncto dato quolibet proveniente.

1. Sit A B B′ A′, Tab. I., ortographia Tori; C P axis conversionis semicirculi A A′ Torum describentis, c centrum hujus semicirculi, D c ejus radius axi perpendicularis in O; C I modulus, seu radius Columnæ; F ortographia puncti lucidi, a quo Tori superficies collustratur, F′ puncti ejusdem ichnographia in plano horizonti parallelo per rectam A B transeunte, cujus puncti distantias a plano ichnographiæ B L F′, a plano ortographiæ F L B, et a tertio hisce perpendiculari per axem P C deducto exhibent rectæ orthogoniæ F L, F′L, L C.

Selige nunc punctum quodvis in semicirculo A A′, dummodo advertas, utro in quadrante ex duobus D A, D A′ positum sit. Esto punctum M in quadrante inferiori. Ducatur recta M Q axi perpendicularis, et super hanc deducatur $c\,q$ pariter normalis. Quære tertiam geometrice proportionalem post modulum C I, et rectam $k\,k'$, quæ rectas C L, L F′ bipartitur; hæcque sit $a\,b$. Pone R e quartam geometrice proportionalem post q M, $q\,c$, r F. Item construe quartam proportionalem post C I, R e, Q M, quæ sit $a'\,b'$. Accipe differentiam inter $a\,b$, $a'\,b'$ eam notando in $a''\,b$. Denique sit $x\,s$ media geometrice proportionalis inter modulum C I, et rectam $a''\,b$. A puncto o medio rectæ C F′ intervallo $x\,s$, et a centro C intervallo Q M describe duos circulos. A punctis i, i' eorum intersectionis, si locum habet, demitte perpendicula ad Q M. Puncta i, i' erunt in ichnographia; puncta autem l, l' inde inventa erunt in ortographia umbræ quæsitæ.

2. Si vero punctum M ad quadrantem superiorem D A′ pertineret; non differentia, sed summa tunc facienda esset rectarum præcedentium $a\,b$, $a'\,b'$; et pro radio circuli centro o describendi summa hæc accipienda esset. Levi hac mutatione excepta, Regula eadem remanet.

3. Scol. I. Si differentia inter rectas $a\,b$, $a'\,b'$ negativa est; reliquum constructionis a Regula præscriptum in primo casu locum non habet, et certo concludere possumus puncto M, quod sumpsimus, neutrius curvæ quæsitæ punctum respondere, scilicet punctum M circa axem C P ductum nullibi umbræ quæsitæ perimetro occurrere.

4. Scol. II. Ex intersectionibus binorum circulorum, quos Regula

centris C, o describi præcipit, illæ tantum attendendæ sunt, quæ citra rectam A B consistunt, sive ante planum tabellæ. De sola enim analoga umbræ portione hic quæstionem esse supponimus.

5. Scol. III. In allata Regula posuimus lumen, uti vulgo fieri solet, ad sinistram spectatoris ante planum tabellæ. Sive autem placeat lumen derivare dextrorsum ante tabellam, sive ultra tabellam dextrorsum, vel sinistrorsum; nil aliud in præcedentibus eveniet mutationis, nisi diversa positio centri o, quod in primo casu erit in angulo BCP', in secundo, et tertio cadet in angulis oppositis ultra tabellam, sic determinante ichnographia puncti lucidi in tres illas plagas per novas hypotheses translata.

6. Scol. IV. Supposuimus præterea Torum desuper collustrari a puncto radiante ad datam altitudinem posito supra planum basis ejusdem Tori. Etsi vero lumen a parte inferiori proveniat; Regula tamen eadem est. Hoc unum attente cavendum erit, ut nempe linearum, quæ præcedentibus $a\,b$, $a'\,b'$ respondebunt, ubi summa præscripta erat, substituatur differentia, et vicissim quo casu differentia ponenda erat, nunc summa capiatur.

7. Coroll. I. Proprietates geometricæ, quibus Regula nostra innititur, facilem suppeditant modum inveniendi puncta maximi, et minimi recessus umbræ anterioris a puncto lucido, partis nempe illius, quam solam delineare suscepimus; quæ puncta peritis cordi præ cæteris merito esse solent.

Producta C A, fiat $CL' = CF'$, et normalis $L'F'' = LF$. A puncto F'' ducatur recta tangens semicirculum AA' in m. Recta mQ' axi perpendicularis transferatur in Cg. Iungatur gt ad rectum cum mQ'. Erunt puncta g, t ichnographia, et ortographia puncti, in quo umbra Tori centro luminis propius accedit.

Rectis $\frac{FR}{2}$, $\frac{OR + Oc}{2}$ facto parallelogrammo rectangulo, quæ inter ejus diametrum, et modulum C I media continetur proportionalis geometrica, sit cd. Recta $\frac{FR}{2}$ translata super O H, et super normali Hc' posita $\frac{Rc}{2}$, habebis punctum c', ex quo si intervallo $c\,d$ secetur

Tori ortographia in n, punctum hoc erit terminus umbræ delineandæ a puncto lucido dextrorsum remotior.

Producatur nunc c' H ad sinistram, et sit $Hc'' = \frac{OR + Oc}{2}$. Circino capiatur diametrus $c'\,d'$ parallelogrammi rectanguli laterum $\frac{FR}{2}$, $\frac{Oc - OR}{2}$, eoque a centro c'' describatur circulus, qui secet semicirculum ADA$'$ in n'. Punctum n' alter erit terminus umbræ a puncto lucido remotior.

8. Coroll. II. Ex allatis facile discimus præcedentium umbræ specierum data altera, alteram invenire. Data enim ortographia $n'\,l\,l'\,n$, ab ejus puncto quovis l duco rectam M l Q axi perpendicularem, et huic perpendicularem indefinitam $l\,i$. Deinde centro C intervallo QM abscindo $l\,i$. Punctum i est ichnographia puncto l respondens.

Vicissim dato quocumque ichnographiæ puncto g, intervallo C g, centro C (intellige punctum illud C, in quo axis Tori, seu columnæ occurrit horizonti, qui constructioni inservit) abscindo C y. Hinc erigo normalem $y\,m$ ad quadrantem DA. A puncto m traduco m Q$'$ axi perpendicularem. Hujus rectæ distantia a puncto g dat ortographiam t eidem puncto g respondentem.

II.

Idem aliter.

Esto nunc (F F$'$) (*) punctum radians, Tab. II.; (C C$'$) centrum Tori, (X Y $c\,c'$) ejus minima diametrus; D D$'$ terminus horizontis, et tabulæ. Centris C, c eodem intervallo quovis describantur semicirculus XNY super XY producta, si opus est, et quadrans $d\,e$ super C$'c$ pariter producta insistens. Nos hic ipso intervallo C$'c$ usi sumus. Ponatur verticalis indefinita $d\,t$, et axis radiorum horizontalium F$'$C. Abscindatur demum quarta geometrice proportionalis C G post ipsam C F$'$,

(*) Frequenter in posterum objecta vera indicabimus eorum ortographiam, et ichnographiam conjunctim proferendo, et parenthesis apposita nota simul conscribendo.

$C'c$, CX; super ce quarta cK post CF', CX, cA; postremo super dA quarta geometrice proportionalis dH post CF', OF, CX.

Hisce peractis, mittantur quotvis secantes ct, ct' a centro c, et horizontales vz, $v'z'$, $v''z''$ ab earum intersectionibus cum semicirculo DE, captis in utroque quadrante binis punctis v', v'' a vertice A æque distantibus. Rectis Hh, Hh' ad secantes ct, ct' parallelis secentur dh, dh'. Iuncto puncto K cum extremis cosinuum punctis p, p', ducantur a puncto d rectæ dk, dk' ad pK, $p'K$ parallelæ, quæ secent intervalla ck, ck'. Additis datæ rectæ CG a puncto G versus F' segmentis ck, ck', subtrahe segmenta dh, dh': habebis puncta q, q'. Hinc duc normales qn, $q'n'$ ad semicirculum XNY; et per n, n' secantes Cs, Cs'. Intervallo $\frac{vz}{2}$, $\frac{v'z'}{2}$, eodemque centro C seca Cs, Cs'. Ab s demum, s' excita normales sr, $s'r'$ ad vz, $v'z'$. Erunt (sr), $(s'r')$ puncta duo curvæ quæsitæ.

Accipe summam $dh' + ck'$ segmentorum, quæ punctum v' suppeditaverat, eamque transfer in Gq''. Inscribe semicirculo duplicem perpendicularem $n''n''$, dummodo id fieri possit citra punctum X, quæ conditio deerat in punctis q, q'. Super secantibus Cn'', Cn'' repete $\frac{v'z'}{2}$, hocque intervallum cadat in s'', s''. Ab hisce punctis erige perpendiculares $s''r''$, $s''r''$ ad horizontalem $v''z''$. Puncta $(s''r'')$, $(s''r'')$ erunt pariter in quæsito umbræ termino, si, uti posuimus, puncta v', v'' ab A æque distant.

III.

Umbra, quæ in Tori superficie remanet, quum radii lucis in eam incidunt paralleli.

Quamquam secundi hujus problematis enodatio inter corollaria præcedentis locum obtineat, nihilominus propter ejus utilitatem, ususque frequentiam in arte graphica inopportunum non videbitur nos eam apposita regula, atque constructione distinctam protulisse.

1. Descriptis, Tab. III., ut supra, ortographia Tori ABA'D'D, ejus axe CQ, et maxima diametro BB', eodemque retento horizonte per

basim AD transeunte, finge radium lucis (ZCLC) in centrum C venientem. Huic erunt cæteri omnes paralleli. Siste primum CM modulo æqualem, eique perpendicularem MN ad CZ protractam. Tribus rectis CN, CM, MN compone quartam geometrice proportionalem M′N′: item erue quartam proportionalem post CM, M′N′, cB, quæ cum Oc conjuncta sit = CI = CG′.

Super IG′ construo parallelogrammum rectangulum, cujus altitudo IG = CI, et produco latera GI, I′G′ ad puncta a, a', primum scilicet, quod jacet in angulo ICG, ubi lumen est, produco ad propiorem cum semicirculo ortographiæ Tori intersectionem, alterum vero usque ad secundam intersectionem. Erunt a, a' puncta ab axe remotiora ortographiæ umbræ anterioris quæsitæ.

2. Sit communis radiorum inclinatio ad horizontem æqualis angulo rcB, quæ inclinatio facile innotescit per datos angulos ZCI, LCI. Ducta ad axem perpendiculari rv, et intervallo rv, centro C secta CL in d', a puncto d' demissa ad rv perpendiculari $d'd$, habebis in curva umbræ contermina punctum (dd') maximi appulsus ad basim AD.

3. Verticali quacumque $p'q'$ inter verticem B, et punctum r in angulo ZCI inscripta, signentur bina ejus intersectionis puncta x, x' cum semicirculo ABA′, et punctum n intersectionis cum BB′; et ponantur horizonti parallelæ xx'', $x'x'''$. Construo tertiam geometrice proportionalem post cn, xn, $p'q'$, eamque transfero utrinque a puncto C in Ck, Ck'. Per extrema puncta k, k' mitto rectas parallelas kk, $k'k'$, quarum angulus inclinationis Ckk' ad basim AD idem sit, ac angulus ACL. Centro C, atque intervallo xo punctorum x, x' ab axe seco rectas kk, $k'k'$. Puncta intersectionum, si quæ sunt intra rectangulum II′, ad quæsitam ichnographiam pertinent. Duo hic habemus puncta f', l'. Ab his mitto rectas perpendiculares ad xx'', $x'x'''$ eas quidem terminando ad xx'', quæ a recta kk lumini propiore procedunt, usque ad rectam vero $x'x'''$ eas perpendiculares producendo, quæ ad rectam alteram $k'k'$ a lumine remotiorem spectant. Quæ novæ fiunt intersectiones f, l, totidem sunt ortographiæ delineandæ puncta præcedentibus f', l' respondentia. In peculiari Tabulæ exemplo unicam utraque recta parallelogrammo inscripta sortita est intersectionem.

Si punctum s extremo r propius assumptum fuisset; Regula unicam quidem dedisset $k''k''$ rectangulo II′ inscriptam; at duplicem nacti es-

semus in ea intersectionem b', e', et duo inde puncta b, e ortographiæ super eadem horizontali $s s''$.

4. Scol. I. Regulam peculiarem præmisimus pro tribus punctis a, a', d inveniendis, etsi inter corollaria Regulæ generalis eorum investigationem reservare possemus. At præterquamquod puncta illa ante omnia quæri solent, duo priora omnino juvabat definire quo tempore rectangulum I I' ipsamet suppeditabant, in quo insigne continetur Regulæ nostræ compendium.

5. Scol. II. Si præscripta constructio medio semicircumferentiæ A B A' puncto B applicetur; ex tribus geometrice proportionalibus secunda, ea nempe, quæ in præcedenti exemplo perpendiculari $n x$ respondet, nulla evadit. Nulla ergo erit et quarta a Regula quæsita, quæ abscissam hinc inde a puncto C super A D capiendam constitueret. Duo proinde rectæ in parallelogrammo I I' inscribendæ in unam nunc convenient C I' cæteris $k k$ parallelam. Propterea facta a centro C intervallo O B intersectione g', inveniemus ichnographiam g'; et per normalem g' F ortographiam g super B B' puncti, quod medio puncto B in umbræ perimetro respondet.

Corollarium hoc novum aliquod præbet nostræ constructioni compendium. Rectas enim, quas a punctis s, x quadrantis inferioris A B ducere necesse est basi A D parallelas, terminare possumus ad g' F in s'', x'': rectarum autem analogarum superiorum $x' x'''$, $s' s'''$ omitti possunt intervalla inter quadrantem B A', et perpendicularem g' F comprehensa.

6. Scol. III. Supposuimus ut antea lumen desuper a parte anteriori sinistra venire. Si dextrorsum illuminatio ab eadem parte fieret; manifestum est rectas C L, C Z in angulis Q C D, Q' C D tunc fore ponendas iisdem conditionibus. Præcipuo Regulæ fundamento ita disposito, operatio eodem modo, eademque lege procedet. Puncta vero, quæ in ortographia Tori in primo casu utrinque ab axe sita erant, in præsenti hypotesi loco invicem permutabuntur, scilicet quæ pro punctis inferioris quadrantis A B præscripta erant, nunc de punctis superioris B A' erunt pronuncianda, et vicissim.

Si lumen desuper a regione sinistra tabellæ posteriori est derivandum; tunc recta C L in angulo Q' C D collocanda est. Rectæ autem parallelæ intersecandæ $k k$ similem subibunt directionis mutationem.

Si vero lumen a parte superna posteriore iterum veniens dexteram tenebit; recta C Z dirigetur in angulo Q C D.

In duobus hisce casibus oppositæ exurgent punctorum dispositiones, ut in duobus antecedentibus.

Lumen antrorsum in parte dextera sub horizonte positum idem afferet in constructione discrimen, quod in quinto casu notatum est.

Pro lumine antrorsum posito sub horizonte ad sinistram discrimen idem se se offeret, quod in tertio casu occurrit.

Si demum Torus a posteriori lumine sub horizonte degente collustretur dextrorsum; locum habet constructio casus primi: si vero sinistrorsum; constructio eadem est, ac ea, quam pro casu secundo indicavimus.

Quamquam vero singulis casibus illuminationis Tori deorsum factæ totidem ita respondeant casus supernæ illuminationis, ut eadem, quæ hisce convenit regula operandi, in primis æque adhibenda sit; notandum tamen est in præsenti hypotesi luminis ab immensa distantia derivati curvas priorum casuum sursum vertere convexitatem, vicissim curvas casuum posteriorum sua vergere convexitate ad horizontem, cui Torus insistit.

Hæc annotasse sufficiat pro casibus, quos praxis sibi raro proponit.

IV.

Idem aliter, et brevius.

1. Posito ut supra, lucis radio centrali (F C F′), Tab. IV., in horizonte per basim Tori traducto, a centro C intervallo quovis C Q describo arcum circuli Q Z, quem seco in Q′ recta C Q′ ad C Q perpendiculari. Per angulos D C F′, D C F innotescet vera cum horizonte luminis inclinatio. Hujus tangentem in circulo Q Z captam pono super D′D in C T. A puncto T demitto perpendicularem T F. Esto nunc punctum quodvis k quadrantis Q Q′. A puncto k demissa perpendiculari ad C Q, hujus segmentum, quod inde nascitur Cp, transfer super T F a T ad P. Per centrum o alterutrius semicirculi ortographiæ Tori duc radium oh ad C P parallelum. Ab h mitte horizontalem hcb'. Intervallo ch translato in Ckh', ab h' excita $h'l$ ad hb' perpendicularem. Erit punctum (lh') in perimetro umbræ delineandæ.

2. Erecta verticali $h h$, per novum semicirculi punctum h mitte alteram horizonti parallelam $h b''$. Ultra punctum Q' pone angulum Q'Ck' æqualem præcedenti Q'Ck, si quidem hic non excedat angulum Q'CZ. Super semidiametro Ck' producta repete Ch' in Ch''. Demum ab h'' dirige ad $h b''$ perpendiculum $h'' l'$. Erit et punctum ($h'' l'$) in umbræ perimetro.

3. Citra punctum Q confice similiter angulum QC$'k$ æqualem angulo QCk, dummodo hic minor sit angulo QCT. Super C$'k$ producta sume punctum $''h$ a C æque, ac punctum $'h$ distans. Mitte ab $''h$ perpendicularem $''h'l$ ad eandem horizonti parallelam, ad quam perpendicularis $'hl$ pertingit. Punctum ($''h'l$) denuo pertinet ad perimetrum umbræ delineandæ.

4. Scol. Adverte non idem punctum k super quadrante QQ' sumptum dedisse bina puncta ($h'' l'$), ($''h'l$), sed duo, alterum termino Q' propius, alterum termino Q, quorum prius in k' translatum opus habet novo puncto h in quadrante AE, novaque horizontali $h b''$; secundum vero translatum in $'k$ uno eodemque puncto quadrantis AD, una eademque horizontali, in qua est punctum jam ante inventum l, tantum indiget. Discrimen hoc inter puncta ultra CQ' posita, et puncta citra CQ, inducit præsentia luminis in angulo DCR. Contrarium eveniret, si lumen in angulo D'CR consisteret.

V.

Umbra, quam Torus Atticæ Basis in Scotiam, et Torum alium subsidentem projicit.

1. Accipe, Tab. V., radiorum quot potueris Torum superiorem tangentium segmenta, quæ ad basim Scotiæ inferiorem terminentur, idest illorum ortographias, et ichnographias $a b$, $a' b'$; $c d$, $c' d'$; $e f$, $e' f'$; $g h$, $g' h'$; ec.

Ortographiæ Tori superioris admove rectam tangentem F$''x$ ad eundem cum horizonte angulum, quo inclinatur radius ille verus, qui Torum tangit, et simul in plano jacet verticali per punctum radians, et per axem Tori transeunte. Radii hujus ortographiam, et ichnographiam exhibent rectæ $a b$, $a' b'$; et plani medii, in quo jacet, ichnographia est recta FC. Arcum P1, quem tangens F$''x$ in ortographia Scotiæ

inferius secat, et ortographias radiorum ab, cd, ef, gh divide in quotlibet punctis per rectas horizonti parallelas, eisque appone numeros 1, 2, 3, ec., quos notabis etiam in axe CR', ubi occurrerent horizontales, quæ a punctis divisionis arcus P 1 traducerentur. Centro C, et intervallis 11, 22, 33, ec. axem inter, et arcum P 1 comprehensis seca ichnographias $a'b'$, $c'd'$, $e'f'$, $g'h'$, et novas intersectiones nota numeris iisdem, quibus distinguuntur superiores intersectiones analogæ. Junge demum ortographias, et ichnographias radiorum rectis axi parallelis. Siquæ hujusmodi parallelarum transierit per puncta divisionum eodem numero distincta; hæc ipsa puncta ad ortographiam, et ichnographiam curvæ in Scotia quæsitæ pertinebunt. Quatuor in figura habes exempla saltem proxima hujusmodi punctorum in rectis 11, 22, 44, hh'.

Quæ puncta hoc modo inveneris hinc, vel inde a rectis ab, $a'b'$, tibi alia totidem indicabunt ad alteram partem. Invento exempli causa dextrorsum puncto 2 super cd, $c'd'$, describe arcum $\alpha\rho$ circuli, cujus semidiametrus sit C 2, centrum C. Ultra C F abscinde arcum $22'$ illi, qui rectis C F, $c'd'$ continetur, æqualem. Ab extremo puncto $2''$ erige axi parallelam $2''2''$, quæ supra basim Scotiæ ad eandem, ac præcedens recta 22, assurgat altitudinem. Erit $(2''2'')$ punctum alterum in umbræ quæsitæ perimetro.

2. Ductis similiter rectis horizonti parallelis, quæ inferioris Tori quadrantem M 1, axem CC', et ortographias ki, lm radiorum superiorem Torum tangentium dividant, nota similiter numeris iisdem puncta omnia divisionum analoga. Distantiis 11, 22, 33, ec. quadrantis M 1 ab axe fac totidem a centro C intersectiones super omnes ichnographias $k'l'$, $l'm'$, ec., et singula nova divisionum puncta distingue numeris ipsis, quibus intervalla dividentia jam notata sunt. Per rectas axi parallelas, uti ss, facile explorabis puncta ortographiæ zy, et ichnographiæ curvæ, quæ umbram a Toro superiori in inferiori factam circumscribit.

Manifestum est nulla istius curvæ puncta esse amplius quærenda, postquam ad ejus intersectionem y cum curva A B umbræ inferioris Tori propriæ perventum erit.

3. Scol. Hæc quædam pertentandi methodus, qua umbram a Toro superiori in Scotia, et Toro inferiori genitam delineare docuimus, non satis geometrica fortasse videbitur. Nihilo tamen minus, qui ejus simplicitatem consideret, et graves difficultates, quas directa ejusdem

umbræ investigatio vitare nullo modo potest, Regulam nostram in praxi omnino præferendam esse facile judicabit.

VI.

Umbra, quam Torus in subjectam Cingulam, quamque Cingula in Scotiam projicit.

1. Quærendus primum est ex radiis Torum tangentibus medius ille, qui jacet in plano verticali per axem Tori, et centrum luminis transeunte; et ad eandem ejus cum horizonte inclinationem ponenda recta fa, Tab. VI, Tori ortographiam tangens. Si recta hujusmodi secat alicubi in b Cingulæ ortographiam; tunc problema, de quo hic agitur, locum habet, aliqua nempe aderit in Cingula lucis, et umbræ separatio; et in Scotia umbræ terminus erit partim ab inferiori Cingulæ perimetro repetendus. In schemate præcedenti recta tangens analoga $F''x$ propter lucis sistema peculiare, quo usi sumus, latus pr Limbi non offendit; quapropter unica fuit curva vh describenda in Scotia, quæ umbram a Toro superincumbente genitam terminabat.

2. Talis sit nunc centri radiantis situs, ut pars aliqua Cingulæ illuminata remaneat. Perpendiculares ab eo demissæ altera in planum tabellæ, seu ortographiæ, altera in superiorem Scotiæ basim productam, quæ hic nobis erit ichnographiæ planum, incidant in puncta F', F; ex quibus ductæ per medium punctum O rectæ F O, F'O erunt ortographia, et ichnographia radii transeuntis per centrum basis ejusdem. Radius hic est axis coni lucidi, quem constituunt radii omnes Cingulam involventes. Hujus axis ichnographia F'O concipiatur producta ultra tabellam in S, ortographia F'O producta in S' sub horizonte.

Hisce dispositis, per verticem inferiorem c rectanguli ce, quod Cingulæ ortographiam refert, ducatur recta $f'x$ tangenti fa parallela, quæ occurrat ortographiæ Scotiæ in x. Per puncta x, b concipiantur ductæ rectæ horizontales, et distantiis horum punctorum ab axe R R' translatis ad O super O F, concipiantur a duobus punctis super O F sic inventis erectæ perpendiculares usque ad horizontales præcedentes. Habebimus in v, r, ubi conveniunt binæ istæ normales, ortographias punctorum maximi recessus ab horizonte umbræ, quam Torus superior in Cingula generat, et umbræ, quam generat Cingula in Scotia.

3. Hinc inde a radii medii ortographia $u\,r$ duc quotvis radiorum Torum tangentium ortographias $m\,n$, $l\,o$, $l'\,o'$, et pone ichnographias respondentes $s\,t$. Centro O, atque intervallo O c describe circulum. A puncto t, ubi unaqæque ichnographia secatur, erige axi parallelam $t\,n$ ad respondentem ortographiam $m\,n$. Punctum ($t\,n$) erit in curva, quæ lumen ab umbra separat in Cingula.

4. Ad curvæ tractum delineandum, quo in Scotia umbra Cingulæ superat umbram $p\,\alpha\,i$ factam a Toro superincumbente, accipe in arcu $p\,\alpha$ puncta quotvis, uti ω. Duc horizonti parallelam $\omega\,h\,k$, quæ axem R R', et rectam F' S' secet in h, k. A puncto k ad rectum cum $\omega\,k$ erige $k\,\phi$ usque ad F S. Construe quartam geometrice proportionalem post F' O, c O, F' k, eaque circino capta describe a centro ϕ circulum. Centro O, intervallo $\omega\,h$ circulum alterum describe, qui priorem secet in z. Mitte axi parallelam $z\,y$, quæ occurrat horizontali alicubi in y. Punctum ($z\,y$) ad curvam quæsitam pertinet. Constructionem similiter repetes, donec intersectiones z evanescant, vel donec ad radiorum ortographias $l\,i$, $l'\,i'$ perveneris, quæ per extrema puncta o, o' curvæ præcedentis transeunt.

5. Quum radii lucis erunt paralleli, quartæ proportionales, quas hic ultimo loco construere opus est, in idem constanter recidunt intervallum c O.

Scol. Duæ sunt zonæ, quibus Scotia veluti cincta continetur. De superiori hic tantum loquuti sumus. Cum vero inferioris projectura superioris Tori projecturæ exæquetur, in ea umbra propria prævalet umbræ, quæ a Toro provenit, ideoque nonnisi umbræ propriæ terminus in ea visibilis est. Hic autem recta est verticalis similiter ac in Limbo sequenti determinanda.

VII.

Umbra, quam sibi inferunt Columnæ Truncus, et Limbus, quamque a Trunco patitur Torus, et Apophygis.

1. Planum verticale per centrum luminis transiens, Tab. VII., concipiatur admotum columnæ Trunco, quem supponimus cylindricum. Limbo pariter aliud admoveatur planum verticale per centrum luminis traductum. In basi Tori describatur ichnographia Trunci, et

Limbi; sintque F', N puncta contactus planorum præcedentium cum utroque ambitu F' L, N M. A punctis iisdem excita perpendicula pq, fg; hæc erunt termini ortographiæ umbræ, quæ fit in utroque membro.

2. Planum Truncum tangens secat Apophygem, tamque late patet intersectio, quanta pars ejusdem plani inter Limbum, et Truncum ipsum continetur. A quolibet Apophygis puncto e ducta ad axem perpendiculari ed, eaque translata in C T a centro C ad tangentem F' Z, erigatur perpendicularis T t ad de. Erit (T t) punctum curvæ intersectionis, de qua agitur. Perpendiculares F' f, uv extremæ ad superiorem altera, altera ad inferiorem Apophygis basim perductæ præbent ejusdem curvæ extrema puncta (F' f), (uv).

3. Per punctum quodvis o superioris quadrantis ortographiæ Tori ducta horizontali oc ad axem transferatur similiter in C x, ita ut a centro C ad rectam F' Z pertingat. Perpendicularis, quæ punctum x cum co conjungit, dat punctum y curvæ Dn, quæ ortographia est intersectionis cum Toro plani ejusdem præcedentis, qua scilicet incipit umbra Tori a Trunco facta.

4. Superior Limbi perimetros (N M C'' F) mittit in Torum lucidam, qua involvitur, superficiem conicam, et novæ umbræ terminum in eo constituit, quem invenies hoc pacto.

Radii, qui per centrum superioris basis Limbi transit, ortographia sit C'' R', ichnographia C R; quarum prior producta secet in punctis a, a', ec. horizontales rectas C' D, co, ec. axem, et extrema Tori puncta jungentes. Demitte ab a, a' perpendicula ab, $a'b'$ ad productam R C. Supposita ortographia foci radiantis in R' cadere, accipe quartam geometrice proportionalem post R' C'', C'' F, R' a, eaque pro semidiametro sumptâ, a centro b describe arcum circuli Y Y'. Item centro C, intervallo C' D arcum decircina X' X. Siquæ fiat intersectio duorum arcuum extra angulum C Z F', ab ea mittatur perpendicularis ad respondentem horizontalem aD. Punctum occursus ad ortographiam pertinebit umbræ, quam Limbus super Toro generat.

5. Quum radii lucis erunt paralleli, quarta præcedens proportionalis semper erit intervallo C'' F æqualis.

6. Quæ casu in figura nostra assumpta est luminis directio, talis est, ut nulla appareat umbra, quam Torus a Limbo patitur. Revera intersectio pro ipsamet suprema horizontali C' D cadit in r intra angulum C Z F'. A fortiori intra angulum eundem cadent intersectio-

nes, quas pro alia quacumque horizontali *co* investigare placeat.

7. Suos et Apophygis habet radios tangentes novam aliam in ejus superficie umbram generantes, cujus aliqua particula citra umbram Trunci consistit, estque ejus quædam veluti appendix. Umbra hæc bis terminatur ab eadem radiorum tangentium serie, antrorsum scilicet per lineam intersectionum eorundem radiorum, quos iterum aliquo saltem tractu excipit Apophygis superficies. Cum autem hujusmodi umbra levissimi sit momenti, nos quoque, uti fieri solet, ab ejus delineatione abstinebimus, quamquam regulæ pro Toro, et Scotia superius traditæ id facile præstare possint.

VIII.

Limites umbræ Abaci super Echino, Zophoro, Astragalo, et Columnæ Trunco, et umbræ, quam hæc ipsa membra sibi invicem inferunt.

1. Rectangulum X P′, Tab. VIII., sit nobis horizon, ejusque amplitudo sit ichnographia dimidii Abaci columnæ umbrandæ, cujus Trunci dimidium ambitum exhibet semicirculus S T R.

Undecumque lumen derivetur, radii, qui Abacum lambunt antrorsum, in planum unicum omnes coalescunt radio illi conterminum, qui transit per inferius Abaci punctum extremum (A P) lumini obversum. Sit recta A Q′ ortographia radii illius extremi; M N ichnographia rectæ lineæ, juxta quam planum istud basim Astragali superiorem secat: sint l′, *k′* puncta occursus ejusdem plani cum Zophori ambitu, et Astragali perimetro superiori in assumptum horizontem projecta. Ab *l′*, *k′* versus ichnographiam centri radiantis mittantur rectæ *l′l*, *k′k* ad P P′ terminatæ. Ichnographia P P′ cum ortographia A C lateris inferioris Abaci jungatur verticalibus *kh*, *lg*. Item erigantur a punctis *k′*, *l′* verticales *k′h′*, *l′g′*. Erunt (*k′h′*), (*l′g′*) puncta illa, ex quibus umbra Abaci in Astragalum emergit, et in Zophorum incipit assurgere.

2. Radii extremi producta ortographia A Q′, et ichnographiæ posito segmento P *p*, quod semicirculus S T R excipiat, a puncto *p* erige verticalem *pq* usque ad productam A Q′. Habebis punctum (*pq*) extremum umbræ Abaci in Trunco, dummodo punctum *q* cadat infra curvam Y Y′ inferius determinandam.

3. Curvæ *h′v* alia puncta præter *h′* directe invenire possumus quæ-

rendo, uti pro punctis l', k' factum est, puncta analoga intersectionis præcedentis plani umbrantis cum maxima, aliisque Astragali circumferentiis quotcumque.

4. Ultra punctum g super A C sumpto alio quolibet puncto m, ab eoque ductis ortographia radii respondentis, et verticali mn ad P P', item ab n ichnographia nn' radii ejusdem ad semicirculum S T R, et juncta verticali $n'm'$ ab n' dimissa, habebitur punctum ($n'm'$) in intersectione Zophori, et plani umbrantis. Sic procedes usque ad terminum $L''z$ infra dicendum.

Curva sic inventa zg' ab Astragalo in g' interrupta rursus apparere in Trunco potest, si quidem positio, et directio luminis idonea sit. Figura nostra hujusmodi continuationis præbet exemplum in tractu $q''q$, qui eadem, ac puncta m', constructione obtinebitur, uti jam vidimus in determinando extremo ejus puncto q.

5. Quære inclinationem plani umbrantis ad horizontem, cujus tangentem habebis in quarta geometrica proportionali post datam altitudinem foci radiantis super horizonte, datam distantiam ichnographiæ ejusdem foci a recta M N, et post sinum totum, seu modulum. Inclinationem hanc metitur ipsemet angulus Q' A B, quotiescumque focus radiorum in plano verticali per axem columnæ, et per punctum (A P) transeunte versetur.

Applica nunc ad punctum A sub inclinatione plani umbrantis ad horizontem rectam, et nota punctum ejus occursus cum Echini ortographia ii'. Recta horizontalis ac, quam ab hoc puncto dimittes, dabit in axe ortographiam a puncti primi occursus plani umbrantis cum Echino. Exinde nota inferius alia quotvis in axe puncta a', a'', ec., adjectis similiter horizontalibus $a'c'$, $a''c''$, ec., existentibus punctis extremis c, c', c'', ec. in altero Echini quadrante. Intervalla B a, B a', B a'', ec. transfer in B' a, B' a', B' a'' super dimidium latus B' P' parallelogrammi P X. Super B' T secentur B' 1, B' 2, B' 3 rectis parallelis a 1, a' 2, a'' 3, quarum angulus ad B' T æqualis sit inclinationi plani umbrantis. Centro 1, intervallo ac; centro 2, intervallo $a'c'$; centro 3, intervallo $a''c''$ fiant super X X' binæ intersectiones 1, 1; 2, 2; 3, 3. Puncta hæc jungantur cum horizontalibus analogis per verticales 1 a, 2 2', 3 3'. Puncta a, 2', 3', aliaque similiter invenienda definient umbræ, quam Abacus in Echinum demittit, ortographiam.

At quum ad curvam $L''rL'''$ perventum erit, qua terminatur um-

bra Echini propria, quamque describere superius, ubi de Toro actum est, docuimus; curva hæc nova L″ *a* L‴ visibilis esse desinit, suumque præsens constructio finem obtinet. Sola ergo Echini, quæ utraque curva L″ *a* L‴, L″ *r* L‴ continetur, pars ultra rectam A Q′ illuminationem admittet.

6. Secundum adest planum umbrans per eandem rectam A Q′ transiens, illud scilicet, quod radii inferius latus Abaci lumini pariter obversum, et in nostro casu sinistrum lambentes constituunt. Curvæ sectiones hujus plani in singulis Epistillii membris factæ sub unica apparent recta ipsa A *q*. Lumine igitur gaudebunt in Echini ortographia trigonum *i* L L′, cujus latus L L′ pars est curvæ, quæ umbræ Astragali propriæ ortographiam definit; in Zophori ortographia, et Astragali spatium Q′Q F′F; in ortographia Trunci spatium, quod remanet sub curva Y Y′.

7. Umbræ in Zophoro, et Astragalo factæ quæ pars ad Abacum pertinet, jam vidimus. Pars altera ab ipso Echino repetenda est. Ut hujus termini ortographia determinetur, ducantur a punctis quotlibet curvæ L′ *r* L″ incipiendo ab L′ rectæ, quæ ortographias radiorum curvam eandem constituentes exhibeant. Sit ad exemplum *r r′*. Quæratur punctum *s*, quod sit ichnographia puncti ejusdem, cujus *r* ortographia est. Ab *s* ad semicirculum S T R ponatur radius horizontalis *s s′*, et ab *s′* erigatur verticalis *s′ r′* usque ad *r r′*. Punctum occursus *r′* est in curva, quæ umbræ Zophori partem terminat Echino debitam. Sic operando facile describemus reliquum *z u* curvæ *g′ u*, quæ duplici radiorum sistemate generatur.

8. Umbræ Echini intersectionem cum Astragalo, quam *z v′* ortographice repræsentat, eadem regula construere possumus, qua usi sumus in basi Attica pro umbra a superiore ad inferiorem Torum projecta.

9. Umbra Astragalo propria, cujus ortographia terminatur a curva Q Q′ *v v′*, et cujus descriptio ad eandem Regulam pertinet pro umbra Tori expositam, obviam habet superficiem Trunci, fitque inter utramque intersectio, cujus ortographia Y Y′ nunc est exploranda. In umbra Astragalo propria capto puncto quolibet extremo (*x y*), et analogo lucis radio (*y y′ x x′*) ad Truncum terminato in (*x′ y′*), ab *y′* duco verticalem *y′ x′* ad *x x′*. Occursus punctum *x′* est in curva quæsita. Sic procedendum erit, donec ad rectam V Y′ perventum erit, quæ ortographice initium est umbræ, quam Truncus sibimetipsi infert, quamque dignoscere supra docuimus.

IX.

Umbra Anuli per circuli conversionem geniti circa axem in eodem ejus plano positum; unde oritur Regula umbrandi Abaci Corinthii Echinum, et Astragalum.

1. Finge circulum quemvis Amm', Tab. IX., circa axem D D′ in eodem plano positum converti. Generabitur Anulus, cujus ortographia erit nobis A D A′ D′ A, et ichnographia minimi ambitus circulus B B′ k B. Si cylindrum huic Anulo inscribas perpendicularem plano conversionis, cujus radius sit intervallo C′o æqualis; pars Anuli, quæ extra cylindrum remanebit, ea erit Armilla, quæ Tori denominationem apud veteres Architectos sortita est; cylindrus autem Columnæ Truncum Apophyge auctum referet, si quidem certa sit inter C′A, C′o proportio. Jam vero abs re non erit hic breviter ostendere, quomodo Regulæ ipsæ, quibus umbram Tori delineavimus, facili negotio applicari possint ad umbram quoque inveniendam tum anteriorem, tum posteriorem totius Armillæ, quæcumque etiam sit inter C′A, C′o proportio.

2. Lucis radii sint paralleli, et eorum axis ichnographia sit H C. Describatur semicirculus Regulæ IV. B B′ E, et K′ C perpendicularis ad H C. Regula illa præscribit, ut captis binis punctis, veluti M, M′, super B M k' ab H C æque distantibus, iisque conjunctis recta M P M′, ducantur per M, M′ secantes C N, C G; transponatur C P super B T a B ad P′; per centrum o ducatur radius os ad C P′ parallelus; tandem captis C N, C G intervallo Q′s æqualibus, fiant intersectiones b, d normalium Qs, N B; Q′s, Gd. Id ipsum et in præsenti casu est omnino faciendum, additis sequentibus.

Comple circulum B B′ E B, et produc ultra B E rectas K′ C, M C, M′ C. Radio os parallelo ad C P′ substitue diametrum ss'; pone et puncto s' suam horizontalem $s'z$. Quam superposuisti Q′s in C N, C G, repete ad oppositas partes in C N′, C G′; atque a punctis N′, G′ suas et horizontali $s'z$ applica normales N′b', G′d'. Puncta b', d' ad umbram Anuli posteriorem extrinsecus factam pertinebunt.

Super iisdem secantibus C N, C N′ accipe Cn, Cg citra B E, et Cn', Cg' ultra B E æquales intervallo puncti s' ab axe D D′. Inverso nunc ordine a punctis anterioribus n, g sic inventis mitte normales ad horizontalem superiorem $s'z$; a duobus posterioribus n', g' mitte nor-

males ad inferiorem $s z'$. Nova occursus puncta b, d; b', d' ad ambitum umbræ interioris Anuli pertinent. Sic procedendo describes curvam duplicem $a f a' f' a$ umbræ universæ propositi Anuli ortographiam terminantem.

3. Habes præterea in figura constructiones præcipuorum utriusque curvæ punctorum, scilicet maximi recessus a, a; a', a' ab axe; maximi, et minimi appulsus c, c; c', c' ad horizontem; intersectionum f, f' inter se, et cum axe D D'; et intersectionum e, e; e', e' cum diametro maxima A A'. Quæ omnia inspectio figuræ, et Regulæ generalis comparatio satis declarabunt.

4. Post hæc facilis evadit solutio problematis pro casu radiorum lucis a dato centro divergentium, applicatio nempe Regulæ secundæ superius traditæ.

5. Suppone circuli A F F' solum quadrantem F I circa axem D D' revolvi. Superficiei posterioris ab eo genitæ portio, quæ medio angulo 60° y C y' superincumbit, Echinum exhibet Abaci Corinthii, si quidem inter o I, et radium conversionis intercedat proportio, quam Abaci compositio requirit. Servatis iisdem conditionibus quadrans F' I suppeditabit similiter Astragalum Abaci ejusdem. In curva ergo $a i i' a'$ reposita est pro utroque membro umbræ propriæ ortographia. Ad hanc igitur inveniendam peculiari regula opus non est. Juvabit tamen indicare curvæ hujusmodi segmentum, quo totius umbræ ortographia tum Echini, tum Astragali continetur.

Ductis in posteriori semicirculo B y E secantibus C y, C y', quæ angulos efficiant 30° cum C D, demitte ad H H' perpendiculares $y p$, $y' p''$. Pone super T T' hinc inde a puncto B segmentum C p in B p'. Per centrum o duc parallelam $o x$ ad C p'. Mitte ab x horizontalem $x q$ ad axem. Transfer $x q$ ad C super C α. Junge normalem αi. Erit punctum i initium ortographiæ quæsitæ. Extremum pro Echini umbrâ punctum i' habebis, si altero segmento C p'' similiter utaris. Extremum vero punctum pro umbra Astragali propria cadit in punctum e, quod jam superius determinavimus.

X.

Umbra interior Loculamenti sphærico semisegmento quovis efformati, cujus aperturæ planum verticale non sit parallelum plano item verticali tabulæ, intercedente inter utrumque angulo dato.

1. Esto $(c c')$ centrum basis, et aperturæ Loculamenti, Tab. X., $(C\,O)$ centrum sphæræ; $(F\,F')$ punctum illuminans; $(F\,c\,F'\,c')$ axis illuminationis; demum $(q'\,t\,p\,k)$ radius aperturæ perimetrum lambens in puncto quolibet $(p\,q')$.

Per centrum C ad productam radii ichnographiam $k\,p$ duc perpendicularem $C\,h$. Centro h, intervallo $h\,k$ ad arcum A Q B terminatum describe novum arcum circuli k X, quem secabis recta $p\,q$ parallela ad $C\,h$. Inscribe in arcu k X rectam $q\,r$ inclinatam ad $h\,k$ eodem angulo, quo ad horizontem radius $(q'\,t\,p\,k)$ inclinatur. Ab r demitte perpendicularem $r\,s$ super $p\,k$; et ab s verticalem $s\,t$ ad ortographiam radii $q'\,t$. Erit t punctum curvæ $y\,z$, qua umbræ quæsitæ ortographia definitur.

2. Corol. I. Si radii sunt paralleli; ichnographiæ omnes $k\,p\,h$ sunt parallelæ ad eundem radium horizontalem $F\,c$; et perpendiculares proinde omnes $C\,h$ cadunt super unam, eandemque directionem P Q. Anguli præterea inclinationis omnium radiorum cum horizonte omnes æquales evadunt dato angulo radii principalis $(F'\,c'\,F\,c)$.

3. Coroll. II. Si præterea tabula, et Loculamenti apertura parallelæ sunt, sive A B parallela ad A'B'; et Loculamentum integra constat quarta sphæræ parte, denique radius verticalis F' O rectum angulum MOD, radius horizontalis F C rectum angulum O C B in partes æquales dividunt, quæ omnes hypotheses communiter assumi solent: tunc perpendicularis $x\,t$ evadit $= \frac{m\,q' + m\,O}{3}$, ex quo mirum enascitur regulæ nostræ compendium.

XI.

Umbra interior, et exterior Fornicis sive Sphærici, sive Elliptici plano dato ad axem perpendiculari superius resecti.

1. Sit (FF′) punctum radians, Tab. XI., CO centrum Fornicis, (UU′QQ′) ejus apertura horizontalis, per quam intus collustratur; (FDRF′R′) axis internæ illuminationis; FS recta per punctum F, et extremum U diametri UU′ transiens; AUU′B Fornicis ortographia, in qua $AO = OE$, si sphæricus sit, si vero ellipticus, erit $AO >< OE$; YnR dimidia ichnographia Fornicis. Sit demum horizontalis Lg ad punctum quodvis L arcus UA, quæ producta occurrat rectis FS; FR in f, k. Cavendum hic est distantiam puncti L ab extremo U arcus AU non majorem esse oportere, quam quæ intercedit inter punctum U′, et intersectionem y rectæ FS cum arcu U′B.

Demitte nunc a puncto k verticalem kv ad F′R′. Centro C, intervallo Lg, et centro v, intervallo fk fac intersectiones z, z'. A punctis z, z' excita perpendiculares zx, $z'x'$. Erunt puncta x, x' in ortographia termini umbræ quæsitæ interioris.

2. Ad construendam curvam, quæ umbram exteriorem Fornicis circumscribit, super OD abscindo $Oc = \frac{AO^2}{CF'}$; super AB pono $Ab = \frac{HF \cdot Oc}{OE}$, existente HF altitudine puncti lucidi supra horizontem, quo utimur. Postremo centro O, eodemque intervallo OA describo quadrantem AK. Hisce dispositis, sit M punctum quodvis arcus AU, et per ipsum normales MP, Mm, quarum prior secet quadrantem AK in N, et ad rectum horizontalem OA; posterior axem OE in i. Per N duco secantem ONT, quæ super verticali erecta ab A secet tangentem AT anguli AON. Ab A duco ad OD rectam Au parallelam rectæ, quæ jungit puncta P, c; per T ad OA mitto Tt parallelam ad ab, posita $Aa = AO$. Differentiam segmentorum Ou, At transfero ad C super F′R′ a C versus F′, si positiva est, a C versus R′, si negativa. Punctum q, quod hic obtinemus, respondentem habet ordinatam qn semicirculi YnR. Duco per n secantem, et super ea repeto a C ad l rectam Mi. Ab i excito perpendiculum lm ad

Mm. Punctum m pertinet ad perimetrum ZV umbræ exterioris propositæ.

XII.

Umbra interior, et exterior Fornicis Sphærici intus collustrati per Fenestras quascumque, habita ratione ejus crassitudinis.

1. Unam tantum fenestram consideramus, ut inutilem vitemus ejusdem regulæ repetitionem. Illam præterea in schemate ponimus quadrangulam, tum quia figura hujusmodi non raro adhiberi solet, tum quia propter multiformem perimetrum clarior constructionis utilitas patebit. Cæterum quæ breviter proponemus pro una, ad alias quotvis fenestras lumini a Fornice simul obversas, quæcumque sit earum figura, facile quisque applicabit.

2. $(Aa'SD'AaRBA)$, Tab. XII., est Fornix umbrandus; $Aa = A'a'$ ejus crassities; $(pn'gk')$ fenestra, qua radii ingrediuntur a foco (FF') provenientes. Facta comparatione situs puncti radiantis, et fenestræ cum plano tabulæ, et plano ad eam perpendiculari per centrum Fornicis (OC) transeunte, distinguo primum ex binis fenestræ lateribus illa, quæ lucidam pyramidem terminant, ab iis, quæ extrinsecus jacent, priora continuo, et pleno tractu delineando, cætera punctis notando, uti in schemate apparet. Priorum enim tantummodo habenda ratio est in præsenti constructione. Hisce præmissis, capio punctum (rx) in latere umbrante lumini propiore, et pono lucis radium $(rr'fb)$. Hic cum a superficie Fornicis exteriori immediate proveniat, opus est ejus ichnographiam fb ad majorem circumferentiam ARA protrahere in b. Demitto ad fb perpendicularem Cc a centro C circuli ARb. Intervallo cb describo a centro c semicirculum bb'. Erigo super fb ad hanc circumferentiam perpendicularem xx'. Eidem inscribo rectam $x'x''$, existente angulo x' complemento inclinationis ad horizontem radii veri $(rr'fb)$. Item ad fb demitto a puncto x'' perpendicularem $x''x'''$. Tandem verticali $x'''r'$ conjungo punctum x''' cum ortographia rr' radii veri. Punctum r' est in curva delineanda pro umbra Fornicis interiori.

3. Recta fb non unius tantum, sed duorum ichnographia est radiorum lucis fenestram radentium. Recta enim fb alibi, ut in puncto y, secat fenestræ ichnographiam gk', ex qua nova intersectione si

mittas perpendiculum ys ad ortographiam; novum in perimetro umbrante reperis punctum (ys), pro quo respondentis radii ortographia ss' a præcedenti rr' quidem dissidet, at ichnographia convenit cum eadem recta fb. Ergo cum et punctum $(y's)$ sit in exteriori superficie Fornicis, idem adhuc inserviet semicirculus bb'. Quatuor demum rectæ yy', $y'y''$, $y''y'''$, $y'''s'$ iisdem conditionibus perductæ, ac præcedentes analogæ, alterum præbent punctum quæsitum s'.

4. Alia duo latera $(qq'lh)$, $(q'n'hh')$ in interiori Fornicis superficie sita sunt. Radiorum idcirco, uti $(vv'f'e)$, ichnographiæ $f'e$ ad interiorem circumferentiam sunt terminandæ; cætera eadem prorsus lege procedent. Novum tamen constructionum sistema in oppositum semicirculum transferre juvabit. In majori enim spatio distributa multiplex delineatio tutior, atque nitidior evadit. Hæc omnia figura commonstrat in serie duplici punctorum u, z; u', z'; u'', z'', qua ad duo nova puncta s', v' perducimur.

5. Ut curvam QP inveniamus, qua ortographia exterioris umbræ terminatur, nihil novi addere opportet iis, quæ pro describenda umbra Tori superius §§. I., II., III., IV. docuimus. Præsens casus hoc unum requirit, ut Toro media pars inferior dempta supponatur, et ablata distantia inter axem conversionis, et centrum semicirculi Torum describentis.

6. Ea etiam, quæ præcedentibus num. 2., 3., 4. diximus, nil aliud sunt, nisi repetita applicatio Regulæ pro Loculamento §. X. traditæ.

XIII.

Umbra, quam data corporis lumen intercipientis perimetros afferre potest plano indefinito, vel planæ figuræ polygoniæ, Sphæræ, et cujuscumque basis Cono, vel Cylindro.

1. Siste horizontis, et tabulæ terminum AB, Tab. XIII., et centrum luminis (FF'), cujus radii impediri desinant ad curvam (1 2 3 1' 2' 3'); sintque CP, CQ veræ intersectiones plani umbrandi cum tabula, et horizonte, quo utimur. Super verticali AF capio AT, quæ pro sinu toto Ao sit tangens anguli inclinationis plani ejusdem cum horizonte, quæ nisi immediate innotescit, ex datis angulis POR, RCQ facile

eruitur. Inter radios propositam perimetrum radentes, qui ad planum decussantur, selige quemvis (F S F′ S′), cujus ichnographia F′ S′ occurrat intersectioni C P in O. Capta item pq pro sinu anguli P O S′, construe quartam geometrice proportionalem post sinum totum, A T, pq; eamque pone ad A super linea tangentium. Habebis respondentem angulum A ot, cui æqualem facies super O S′ angulum S′ O s. Super F′ S′ a punctis F′, 1′ excita ad eandem partem, ubi jacet recta O s, perpendiculares F′ X, 1′ 1″ verticalibus respondentibus A F′, i 1′ æquales. Per puncta X, 1″ mitte rectam X x ad O s. A puncto occursus x deduc perpendicularem xy ad F′ S′. Demum junge verticalem yy' inter punctum y, et radii ortographiam F S. Erit (yy') curvæ punctum, qua data perimetros in superficie plana umbram terminat.

2. Plano indefinito substituatur figura quævis plana, veluti $(aca'c')$; ad eamque perveniat radius (F h F′ S″), qui perimetrum umbrantem tangat in puncto (33′). Super F′ S″ ad puncta F′, 3′, et O′ occursus cum ab pono ad rectum perpendicula A F, i 3, mn, et noto tria puncta Z, 3″, O″. Ab O″ duco O″ S″ ad radii ichnographiam F′ S″ parallelam, et O″ P′ parallelam ad rectas horizontales, quæ in plano figuræ, de qua agitur, describi possunt. Construo, ut supra, quartam geometrice proportionalem post sinum totum, tangentem anguli inclinationis horizontem inter, et planum figuræ, et sinum anguli P′ O″ S‴. Angulum S‴ O″ s' facio ad O″, cui tangens sit quarta hæc proportionalis. Per duo puncta Z, 3″ duco ad N″ s' rectam Z z; a puncto z perpendicularem zr ad F′ S″; tandem ab r ad F h perpendiculum rr'. Cum puncta r, r' cadant intra figuras ac, $a'c'$; punctum quoque (rr') est in figura proposita, et in ejus umbræ termino.

3. Hemisphærium (g G E L f L′) feriat lucis radius (F 2 g F′ 2′ g'). Traducta a centro D semicirculi L f L′ perpendiculari D dc' ad F′ g', pono dc æqualem altitudini R C centri C, et intervallo dg' describo a centro c circulum $uc'e$. Ab F′, 2′ ad rectum cum F′ g' demitto F′ U, 2′ 2″ æquales verticalibus A F, i 2. Per U, 2″ mitto rectam U u ad primum cum circumferentia ec' occursum; ab u perpendicularem uv ad F′ g'; a v verticalem vv' usque ad F g. Punctum v' cadit in circulo G E. Idcirco concludo punctum (vv') in curva situm esse, quæ umbram in Sphæra quæsitam circumscribit.

4. Lucis radii eandem perimetrum radentes trajiciant nunc superficiem Coni, aut Cylindri cujscumque generationis, recti, vel obliqui,

isoscelis, vel scaleni (BIDB'I'D'), (MPM'P'), Tab. XIV., sitque ad exemplum pro Cono radius (F'1hF1'z), qui occurrat horizonti in puncto z. Duc per centrum luminis (FF'), et verticem Coni (II') rectam (F'nFO); et siste punctum O ejus occursus cum horizonte. Junge puncta O, z recta Oz. Si recta ista basim Coni secat alicubi; a puncto intersectionis lumini viciniore, uti in nostro casu r, mitte perpendicularem rr' ad tabulam: ab r' dirige ad verticem I rectam rI. Punctum x, ubi hæc trajicit radii assumpti ortographiam F'h, est ortographia umbræ a punto (1,1') genitæ super Cono.

5. Pro Cylindro regula eadem manet, dummodo advertas rectam a centro luminis ducendam ad verticem Coni hic in rectam abire parallelam ad axem, seu latus Cylindri. In figura rectam hanc exhibent duæ F'm, FO' parallelæ ad MQ, M'Q'; proinde punctum ejus occursus cum horizonte est O'. (F'LFS) alter est radius umbrantem perimetrum tangens in puncto (2 2'), cujus occursus ortographia v cum Cylindri superficie eodem prorsus modo, ac punctum x, super Cono invenitur.

Punctum O, et O', si usum respicis, cui inservit, umbræ centrum nuncupare non dubitaveris.

6. Scol. I. Ante omnia in quinque præcedentibus, aliisque similibus constructionibus suscipiendis experiri juvat binos radios extremos superficiem umbrandam, qua latius patet, complectentes, scilicet a punctis F, F', Tab. XIII., ducendæ sunt rectæ FG, FE, quæ ortographiam, et rectæ simul F'L, F'f, quæ ichnographiam corporis umbrandi complectantur. Si alterutrum rectarum hujusmodi tangentium par nullum in respondente umbrantis perimetri projectione arcum abscindit; nullam concludes in proposita superficie umbram existere ab eadem perimetro productam. Si vero perimetri umbrantis tum ortographia, tum ichnographia, a binis rectis secatur; umbra quæsita locum habere poterit; at siquæ possibilis est, ea repeti tantum debet ab illo veri perimetri umbrantis tractu, qui respondet minori ex duobus angulis, quos binæ illæ secantes efficiunt. Sic pro Sphæra minor angulus LF'f abscindit in ichnographia perimetri umbrantis arcum $\alpha' \rho'$; angulus major GFE arcum $\alpha\rho$. Idcirco illos tantum lucis radios extremos explorare aggredior, quorum ichnographiæ inter puncta α', ρ' cadunt, uti F'g':

7. Scol. II. Si corpus inter umbrandum, et perimetrum umbrantem,

de qua agitur, vel ipsum luminis centrum corpus aliud interponatur; secundi hujus corporis complecti primum debes ortographiam, et ichnographiam binis rectis tangentibus ab ortographia, et ichnographia centri radiantis deductis. Si alterutrum, vel utrumque harum tangentium par analogæ corporis umbrandi projectioni nihil abripiat; præscripta num. 6. præparatio institui potest. Si vero novæ istæ tangentes ortographiam, et ichnographiam simul corporis umbrandi alicubi trajiciant; præcedens præparatio ad eas tantum partes utriusque projectionis corporis umbrandi reducenda est, quæ extra binas illas tangentes cadunt. Hæc satis nota, et manifesta sunt; ac proinde peculiari schemate non indigent.

8. Corol. I. Quum radii paralleli sunt, angulus POS' idem semper est, idem idcirco remanet et angulus sOS', Tab. XIII. Rectæ pariter $O''s'$, quum in hoc casu semel inveneris, eandem ubique servabunt directionem.

9. Corol. II. Pro Hemisphærio variæ quidem erunt chordæ $g'g'$, ac proinde varius circulus euc' describendus. At centrum ejus super eadem semel ducta perpendiculari Ddc' in casu præcedenti semper consistet.

10. Corol. III. Si axis Cylindri umbrandi verticaliter imminet centro C'; punctum O' cadit in F; ac proinde secans $O'S$ radio ipsi explorando superimponitur. In præsenti ergo casu Regula huc redit, ut nempe quæramus, ubi radius ipse horizontalis occurrit basi Cylindri.

11. Corol. IV. Si Coni, vel Cylindri auferatur convexa superficies, quam hucusque lumini supposuimus obverti; Regula præcedentis num. 4. a punctis r, u ad alia duo analoga ω, α tranferenda est, et rectis rr', $r'I$; uu', $u'v$ substitui debent rectæ similiter ducendæ $\omega\omega'$, $\omega'I$; $\alpha\alpha'$, $\alpha'\beta$. Unde puncta quæsita x, v abeunt in y, β.

12. Corol. V. Hæc, quæ hisce numeris postremis, et Tab. XIII, XIV. perstrinximus, iis additis, quæ supra §§. V., VI., VII., et VIII. continentur, problema de umbris mutuatis absolvunt pro cunctis saltem casibus, qui in Architectonicis delineationibus usu possunt venire. Umbræ enim, quas externæ Fornicum superficies a corporibus altius assurgentibus recipiunt, vel Fornices ipsi in tecta, quibus insistunt, vel in proximas ædes transmittunt; umbræ, quas tecta ipsa, et superiora cujusque Ordinis membra sive plana, sive cylindrica in inferiora demittunt; umbræ demum, quas Folia, Volutæ, aliique Corinthii, vel Jonici Ordinis ornatus, quasque arcus Intercolumniorum in subjecta, et vi-

cina corpora, et finitimos porticus diffundunt, omnes facili, et cuivis obvia Regularum, quas hic ultimo loco exposuimus, applicatione delineabuntur; si quidem rite delineatæ prius fuerint corporum umbrantium perimetri, vel umbræ eorum propriæ, si convexa fuerint, quæ pro umbranti perimetro superius sic dicta assumendæ sunt.

XIV.

Demonstratio Regularum, quæ §§. I., II., III., IV., et IX. continentur.

1. Radius $(F\,l'\,F'\,i')$, Tab. I., si de numero illorum est, qui illuminationem Tori circumscribunt, certe Tori superficiem non trajicit, sed tantum lambit, et in unico puncto $(l'\,i')$ contingit. Ergo semicirculus A D A', qui circa axem P P' circumvolutus Torum generat, semel tantum obviam habet, et solo in puncto M excipit radium ipsum, quum scilicet super horizontalem $C\,i'$ pervenit.

Pone brevitatis gratia distantiam centri c ab axe, $cQ = m$; diametrum semicirculi A A', $2\,c\,D = 2\,r$; distantiam, quam punctum M constanter servat ab horizonte, $q'l' = u$; distantiam, quam tenet a tabula, dum radium subit, $q'i' = y$; distantiam a plano verticali super C P' erecto, $Cq' = z$; distantias analogas puncti radiantis, $LF = c$, $LF' = b$, $CL = a$. Erit $QM = C\,i' = \surd(y^2 + z^2)$; $Mq = \surd(y^2 + z^2) - m$; $cq = r - u$, vel $cq = r + d - u$, si placeat horizontem ad aliquam a Toro distantiam d assumere. Cum autem propter circuli naturam sit $cq = \surd(\overline{cd}^2 - \overline{Mq}^2) = \surd[r^2 - (\surd(y^2 + z^2) - m)^2]$, habemus pro puncto contactus $(i'\,l')$ æquationem

$$\text{(A)}\quad u = r - \surd[r^2 - (\surd(y^2 + z^2) - m)^2].$$

Capti nunc ubicumque in eodem radio alterius puncti $(\varkappa\,\omega)$ fac distantias analogas $v\varkappa = u'$, $v\omega = y'$, $Cv = z - vq' = z - i$, seu $Cv = z \pm i$. Invenies pro radio propter nota puncta $(F\,F')$, $(l'\,i')$, per quæ transit, æquationes duas

$$\text{(B)}\quad \left|\begin{aligned} u' &= u + \frac{c - u}{a - z}(z \pm i), \\ y' &= y + \frac{b - y}{a - z}(z \pm i) \end{aligned}\right|.$$

Hisce positis, redeamus ad circumferentiam Torum generantem A A'. Hæc postquam in suo motu radium primo nacta est in puncto $(l'i')$, nullibi in nostro casu eundem secabit. Ergo punctum quodlibet $(\alpha\,\omega)$ in radio sumptum tam hinc, quam inde a puncto $(l'i')$, quum in eodem erit plano verticali cum semicirculo, distantiam ab hujus centro obtinebit dimidia diametro majorem. Iamvero distantiæ istius quadratum, si loca indeterminata puncti $(\alpha\,\omega)$, et centri in eodem plano verticali degentis attente consideres, et specierum, quas assumpsimus, et æquationum (A), (B) memineris, facile videbis repræsentari a formula $(r-u')^2 + \left(\sqrt{(y'^2+(\aleph \pm i)^2)} - m\right)^2 =$

$$\left(r - u \mp i\frac{c-u}{a-z}\right)^2 + \left[\sqrt{\left(\left(y \pm i\frac{b-y}{a-z}\right)^2 + (z \pm i)^2\right)} - m\right]^2,$$ quæ,

nota evolutione facta, formam induit $r^2 \pm \mathrm{P}i + \mathrm{Q}i^2 \pm \mathrm{R}\,i^3 +$ ec., et conditiones idcirco præcedentes huc reduci, ut simul sit tum pro utroque signo, tum pro omnibus saltem infra datum limitem valoribus quantitatis i, $r^2 \pm \mathrm{P}i + \mathrm{Q}\,i^2 \pm \mathrm{R}\,i^3 > r^2$, sive

$$\text{(C)} \quad \pm \mathrm{P} + \mathrm{Q}\,i \pm \mathrm{R}\,i^2 + \text{ec.} > 0.$$

Atvero cum quantitates P, Q, R, etc. ab i non dependeant, ac proinde valore non mutentur, variante quantitate i; evidens est duplicem conditionem (C) impossibilem fore, nisi terminus $\pm$P in semetipso destruatur. Aliter enim hoc eveniret, ut decrescente i, pars sola seriei $+$P, vel $-$P reliquum negative excederet, et propterea conditio eluderetur.

Si ergo radius in puncto unico $(l'i')$ Torum contingit; necesse est contactus distantias u, y, z ita esse inter se comparatas, et cum datis distantiis puncti radiantis ita colligari, ut quantitatem P nihilo æqualem reddant. Novam ergo habemus æquationem $\mathrm{P}=0$, quacum adimpleri adhuc conditio debet $+i\mathrm{Q} \pm i^2\mathrm{R} +$ ec. > 0, sive $\mathrm{Q} \pm i\mathrm{R} +$ ec. > 0.

Valorem illum concipe omnium primum indeterminatæ fractionis i, quo fit $\mathrm{Q} > i\,\mathrm{R} +$ ec. Dico hunc, et valores omnes ipso minores ejusdem i conditioni satisfacere. Ut res ita se habeat, nil aliud requiritur, nisi ut sit $\mathrm{Q} > 0$. Evolutione autem superiori reapse facta, invenis

$$\mathrm{Q} = \frac{(c-u)^2}{(a-z)^2} + \frac{1}{(a-z)^2\sqrt{(y^2+z^2)}}.$$

$$\left[\left((b-y)^2+(a-z)^2\right)\left(\sqrt{(y^2+z^2)}-m\right)+\frac{m}{y^2+z^2}\left(y(b-y)+z(a-z)\right)^2\right],$$

qui valor necessario positivus est. Atqui Regula I. æquationem præterea $P=0$ omni ex parte adimplet. Habemus enim $P=\frac{2(r-u)(u-c)}{a-z}+\frac{2\left(y.\frac{b-y}{a-z}+z\right)\left(\sqrt{(y^2+z^2)}-m\right)}{\sqrt{(y^2+z^2)}}$, quo substituto valore, æquatio in hanc disponi potest

$$\text{(D)}\quad \left(y-\frac{b}{2}\right)^2=\frac{a^2+b^2}{4}-\frac{(r-u)(c-u)\sqrt{(y^2+z^2)}}{\sqrt{(y^2+z^2)}-m}-\left(z-\frac{a}{2}\right)^2,$$

idest in æquationem pro circulo centro o, intervallo $=\sqrt{\left[\frac{a^2+b^2}{4}-\frac{(r-u)(c-u)\sqrt{(y^2+z^2)}}{\sqrt{(y^2+z^2)}-m}\right]}$ describendo, uti regula revera præcipit.

Interea manifeste sequitur in circumferentia hac ipsa situm esse punctum i', idest ichnographiam puncti contactus radium inter, et Torum. At punctum ipsum i' necessario locum habet etiam in ichnographia circumferentiæ a puncto M descriptæ circa axem P P'. Intersectiones igitur i, i' horum circulorum adimplent omnes præcedentes conditiones, et veras ichnographias exhibent contactuum Torum inter, et radios duos pro puncto M, quod assumitur in semicirculo Torum ipsum generante. Ortographias autem respondentes esse puncta l, l' occursus perpendicularium $l\,i$, $l'\,i'$ cum horizontali Q M, demonstratione non indiget.

Scolia, et Corollaria §. I. satis facili applicatione, et comparatione æquationis (D) eruuntur: idcirco iis non immorabimur.

2. Pone in æquatione (D) $F'C=l=\sqrt{(a^2+b^2)}$; $DM=\omega$; $F'CA=n$; $i'CF'=\alpha$. Erit $a=l\cos.n$; $b=l\,\text{sen}.n$; $\sqrt{(x^2+y^2)}=m+r\cos.\omega$; $u=r-r\,\text{sen}.\omega$; $y=(m+r\cos.\omega)\,\text{sen}.(n+\alpha)$; $z=(m+r\cos.\omega)\cos.(n+\alpha)$: et æquatio (D) formam hanc alteram induit

$$\text{(D')}\quad \cos.\alpha=\frac{m}{l}+\frac{r}{l\cos.\omega}\pm\frac{(c-r)\,\text{tang}.\omega}{l}.$$

Hæc est ipsa æquatio, quam obtinebis, si Regulæ II. constructiones, et Tabulæ II. elementa algebraice traducas, et conferas.

3. Si denominationibus præcedentibus adjicias hanc alteram $ZCI = h$, Tab. III., habebis $c = l \cos. n \operatorname{tang}. h$. Substitue in æquatione (D) valores istos quantitatum a, b, c, et simul pone $l = \infty$. Orietur æquatio casus radiorum parallelorum propria

$$(F) \quad z = y \operatorname{tang}. n + \operatorname{tang}. h . \frac{(r-u)\sqrt{(y^2+z^2)}}{\sqrt{(y^2+z^2)}-m},$$

quæ cum propter delectum, qui in antecessum fit punctorum x, x' in semicirculo ABA', nota exurgat quantitas $\operatorname{tang}. h . \frac{(r-u)\sqrt{(y^2+z^2)}}{\sqrt{(y^2+z^2)}-m}$, æquatio est rectarum propria kk angulo n ad AD inclinatarum, quas reapse invenire docet Regula III. num. 3. Qua peracta constructione, manifestum est ichnographiam umbræ puncto x respondentis esse punctum intersectionis factæ super kk a centro C intervallo $ox = \sqrt{(z^2+y^2)}$.

Quæ præcedit num. 1. ejusdem §. III. constructio, æquatione ipsa (F) continetur, quum in ea fit $y = o$. Ibi enim agitur de punctis a, a' in umbræ perimetro simul, et in tabula positis.

4. Posito $l = \infty$ in æquatione (D'), postquam valor $c = l \cos. n \operatorname{tang}. h$ substitutus fuerit, hanc alteram pro radiis parallelis æquationem obtinemus $\cos. \alpha = \pm \cos. n \operatorname{tang}. h \operatorname{tang}. \omega$; sive posito $= \nu$ angulo inclinationis veræ radiorum lucis cum horizonte, cum sit $\operatorname{tang}. \nu = \cos. n \operatorname{tang}. h$, habemus

$$(F') \quad \operatorname{tang}. \omega = \frac{\cos. \alpha}{\operatorname{tang}. \nu}.$$

Si captis successive angulis $\alpha = k CQ$, Tab. IV., construas $\frac{\cos. \alpha}{\operatorname{tang}. \nu}$ idipsum facies, quod Regula IV. præscribit.

5. Regula IV. valores tantum respicit angulorum ω, α quadrante minores sive positivos, sive negativos, propterea quod ab iis solum pendet umbra dimidii Tori anterioris ibi quæsita. Cæterum æquationem (F') adimplent valores angulorum α, et ω inter se respondentes quadrante majores tum positivi, tum negativi, qui pertinent tum ad umbræ exterioris continuationem in Tori superficie ultra tabulam, tum ad umbram superficiei, quæ gigneretur a reliquo semicirculo interiori.

Evidens autem est valores anguli ω quadrante minores pertinere ad

exteriorem umbræ hujusmodi Anuli ambitum, valores vero quadrante majores, cum ad semicirculum interiorem pertingant, ad interiorem umbram omnes pertinere.

6. Scol. Aliquanto brevior fuisset demonstratio æquationis (D), si a consideratione plani Torum tangentis per algorismum Differentialem derivata fuisset. Nos vero hæc adminicula non omnibus obvia data opera omisimus, ut Regula nostra a primis directe repetita principiis clarior, et majori tironum numero intellectu facilior evaderet.

7. Corol. Sit ADA', Tab. I., non amplius semicirculus, sed alia quælibet linea curva, quæ similiter circa axem PP' circumducta aliam generet superficiem umbrandam. Eadem adhuc uti poteris æquatione (D), dummodo advertas tunc r esse radium, uti vocant, curvaturæ; eoque describas semicirculum respondentem, cujus centrum pariter, ac radius ipse r, data curva ADA', pro quovis ejus puncto M innotescit. Quamobrem Regula prima universalis est pro delineando umbræ termino in superficiebus illis, quæ a curva linea circa axem conversa describuntur:

XV.

Demonstratio Regularum, quas §§. V., VI., VII., et VIII. complectuntur.

1. Regulæ paragraphi V. demonstratione non indigent; nil aliud enim requirunt, nisi ut intelligatur punctum in horizonte quovis datum, ut ichnographia sit alterius puncti dati in spatio, in eadem cum hoc ipso situm esse debere recta verticali.

2. Radii Torum superiorem Atticæ basis tangentes quicumque in Columnæ Limbum impingunt, sui occursus punctorum ichnographias sortiuntur omnes in semicirculo, qui Limbi ichnographia est. Ergo posita ortographia mn radii Torum tangentis, Tab. VI., et ejus ichnographia producta in t ad perimetrum hujusmodi semicirculi, ut dignoscatur, utrum radius verus analogus Limbo occurrat, et quo in puncto, nil aliud faciendum restat, nisi intersectio n ejus ortographiæ mn per rectam tabulæ perpendicularem a puncto t deductam. Si intersectio n cadit in rectangulo dg ortographia Limbi; punctum (nt) est occursus qu situs, ac proinde umbræ punctum extremum super Limbo pro radio $(mnst)$.

At ne irrita suscipiantur radiorum Torum tangentium experimenta, explorandus primum est tractus ille curvæ D E, quo fit separatio luminis, et umbræ in Limbo columnæ. Evidens autem est ex radiis Torum tangentibus, siqui in Limbum impingit, hac proprietate illum præ omnibus gaudere, cujus contactus horizonti propior est, sive minimus angulus inclinationis ad horizontem. Radius hic cum in plano verticali jaceat per centrum luminis ducto, qui Torum bipartitur, si circa axem circumducatur cum plano ipso, positionem capiet tangentis fab, quam Regula indicavit. Si ergo recta hæc non secat alicubi latus dc rectanguli dg; nulla erit luminis, et umbræ separatio quærenda in columnæ Limbo. Si vero in aliquo puncto b secat dc; mitte ab a horizontalem, et nota punctum u ejus occursus cum curva D E. Investigationem radiorum tangentium, qui super Limbo decussantur, evidens est esse hinc inde a puncto u incipiendam, ut irrita vitentur experimenta.

3. Intelliges, quæ eodem §. VI. num. 4. præscripta sunt pro umbra a Limbo in Scotiam projecta, si concipias conum lucidum Limbum involventem simul cum Scotia secari planis horizontalibus. Sectio, quæ fit in Scotia a plano per ωk transeunte, est circulus, cujus centrum est punctum h, et radius $h\omega$; sectio autem in cono lucido facta circulus pariter est, cujus centrum consistit in occursu axis (F O S F′O S′) cum plano secante, radius vero est quarta proportionalis post axem ad O terminatum, radium O c, et axem ipsum ad planum usque secantem productum. At prima, et tertia harum proportionalium, sunt inter se, ut earum projectiones ortographicæ F′ O, F′ k; locum habet ergo proportio a Regula præscripta. Circuli isti duobus in punctis se invicem secant, quæ si inveneris, bina habebis umbræ quæsitæ puncta, quorum equidem ortographiæ super eadem horizontali ωk sitæ erunt. Regula non describit quidem veras illas circumferentias, ac proinde non præbet puncta vera intersectionum; at cum describat veris intervallis earum ichnographias, obtinet punctorum illorum ichnographias z, quibus eadem respondent in horizontali ωk puncta y.

Quisque præterea intelligit puncta ω hic exploranda cadere omnia sub recta $f'x$ ad superiorem tangentem fa parallela.

4. Constructiones §. VII. per se jam satis intellectu faciles sunt post ea præsertim, quæ num. præcedenti declaravimus.

5. Regulæ etiam §. VIII. ita declaratæ sunt, ut sola prima artis graphicæ principia ad earum demonstrationem sufficiant. Regulam ipsam

ibi num. 5. propositam, quæ forte minus obvia videbitur, statim intelliges, si advertas planum umbrans occurrere planis horizontalibus per rectas ca, $c'a'$, ec. ductis juxta lineas rectas, quarum ichnographiæ transeunt per puncta 1, 2, 3, ec. segmenti B'T. Nam rectæ a 1, a' 2, ec. propter angulum a Regula præscriptum exhibent rectas ipsas, quas duceres in plano umbrante perpendiculares ad illas intersectiones. Si ergo a centro 1 super SR intervallis ac, $a'c'$, ec. describeres circulos ab iis planis secantibus efformatos in Echino; secares rectas per puncta segmenti B'T 1, 2, 3, ec. transeuntes; et haberes in intersectionibus hisce novis ichnographias punctorum, qui sectionem plani umbrantis cum Echino constituunt. Nos vero centra successive sumpsimus in punctis ipsis 1, 2, 3; et iis ipsis intervallis sectiones fecimus 11, 22, 33 in unica SR; quod idem est pro invenienda ortographia L'' a L''' curvæ quæsitæ.

XVI.

Demonstratio Regularum X., XI., et XII.

1. Erige circa hk circulum Xqrk cum figura $pqrs$, Tab. X., donec in plano verticali consistat. Tunc circulus Xqrk confundetur in superficie Loculamenti cum circulo illo minori, qui oritur ab intersectione plani verticalis per Fhk transeuntis; proinde punctum q, quod tunc verticaliter insistit supra punctum p, conveniet cum puncto q'. Atqui recta qr eandem habet ad Fhk inclinationem, ac radius verus ($q'tpk$). Ergo pr cum radio vero pariter confundetur. Ergo punctum r erit verus radii ($q'tpk$) occursus quæsitus cum interiori Loculamenti superficie, cujus ichnographia erit adhuc punctum s.

2. Quoad umbræ interioris perimetrum delineandam in Fornice sphærico, vel elliptico, Tab. XI., Regula eadem consideratione §. XV. num. 3. innititur sectionum circularium, quæ fieri simul possunt in cono lucido, et in Fornice intus umbrando. Regulam ergo solam expendemus, qua ortographia ZmV perimetri umbræ exterioris describitur, idque in solo casu figuræ ellipticæ; sphærica enim Regularum ad Torum spectanctium particeps est.

Regula supponit punctum M, quum circa axem OE circumvolutum in (ml) pervenit, quendam lucis radium tangere, quem nec ante te-

tigerit, nec postea tangere amplius possit. Fac AO : OE :: 1 : e, AN $=\omega$; OP $= i$M $=$ cos. ω; MP $= e$ sin. $\omega = u$; F′R′A $= n$; nY $=\alpha$; distantiam, quam punctum M tenet a plano tabulæ parallello per centrum C demisso, quum in (ml) versatur, $=$ Mi sin. $(n+\alpha) =$ cos. ω sin. $(n+\alpha) = y$; O$e = z$. Cum autem futurum sit M$i = \sqrt{(y^2+z^2)}$; erit etiam $z =$ cos. ω cos. $(n+\alpha)$. Pro Ellipsi præterea habemus

$$(a) \quad u^2 = e^2(1 - y^2 - z^2).$$

Radius tangens pro puncto (ml) propter ea, quæ dicta sunt §. XIV. num. 1., continebitur æquationibus

$$(b) \left\{ \begin{array}{l} u' = u \pm \dfrac{u-c}{z+a} \cdot i, \\ y' = y \pm \dfrac{y-b}{z+a} \cdot i \end{array} \right\},$$

referentibus hic $u', y', -z'; c, b, -a; \mp i$ id ipsum, quod in eodem §. $u, y, z; c, b, a; \pm i$ repræsentabant.

Si radius ante, vel post occursum (ml) penetraret in Fornicem, secundus adesset valor aliquis quantitatis i præter jam notum $i = 0$, per quem æquationes (a), (b) adhuc simul adimplerentur. Fac in æquatione (a) $u = u'$, $y = y'$; pro z substitue $z \pm i$; ac per duas (b) elimina y'. Habebis, demptis hinc inde æqualibus, æquationem $\pm \dfrac{u(u-c)}{a+z} = \mp e^2 \cdot \dfrac{y(y-b)+z(z+a)}{a+z} + iQ$, ubi iQ est quantitas, quæ evanescit, evanescente i. Atqui binæ radii intersectiones cum Fornice in unicam conveniunt (ml). Ergo in hac æquatione, a qua nova pendet intersectio, erit denuo $i = 0$. Inde vero necessario sequitur conditio $u(u-c) = -e^2(y(y-b)+z(a+z))$; vel si valores trigonometricos substituas, advertens præterea, posito F′C $= l$, esse $b = l$ sin. n, $a = -l$ cos. n, hæc altera æquivalens

$$(c) \quad \text{cos.}\,\alpha = \frac{1}{l\,\text{cos.}\,\omega} - \frac{c}{el}\,\text{tang.}\,\omega.$$

Si nunc partes hujus æquationis successive construere suscipias in tabula ipsa XI.; videbis loca omnia jam a Regula occupata fuisse.

3. Illuminationis terminus in interiori Fornicis sphærici superficie, quum per fenestram quadrangulam collustratur, eodem modo inventus

est §. XII., quo illuminationem definivimus Loculamenti §. X., per sectiones scilicet factas planis verticalibus a centro luminis demissis. Nova ergo demonstratione hic opus non est. Cætera non minus obvia, et manifesta sunt.

XVII.

Demonstratio Regularum §. XIII.

1. Concipe, Tab. XIII., planum verticale super F′S′ erectum ad radium lucis verum (FSF′S′) terminari, et considera ejus intersectionem cum plano umbrando, quæ linea recta est a puncto O usque ad occursum radii veri cum plano eodem assurgens. Si fingas deinde planum verticale circa F′S′ rotare, et super horizontem dejici; recta ejus intersectionis cum plano umbrando, et radius ipse verus cadent in Ox, Xx, si quidem anguli, quos faciunt Xx, et xO cum F′S′, iidem sint, ac anguli pristinæ positionis linearum ipsarum cum eadem F′S′; et præterea punctum aliquod, veluti X, rectæ Xx eandem teneat distantiam XF′ ab F′S′, quanta est distantia puncti respondentis in radio vero ab F′S′. Duplicem hanc conditionem pro recta Xx facile servamus, si eam ducimus per extrema puncta X, 2″ rectarum F′X′, 2′2″ perpendicularium ad F′S′, et æqualium altitudinibus AF, i2 punctorum radii veri (FF′), (22′) super horizonte. Id reapse præscribit Regula XIII. num. 1. Videamus, utrum Regula ipsa conditionem adimpleat, quæ requirit, ut recta Ox eadem sit, ac intersectio plani verticalis cum plano umbrando in horizontem rotatione deducta; quæramus scilicet angulum, quo intersectio illa cum F′S′ inclinatur.

Exhibeat subjectum in Tabula ipsa XIII. schema (*) prospectum aliquem verum linearum omnium, de quibus agitur, additis verticali xy, et perpendicularibus $x\gamma$, $y\gamma$ ad intersectionem OP plani umbrandi cum horizonte, quas notum est in idem punctum γ rectæ OP convenire. Erit $x\gamma y$ angulus, qui metitur datam inclinationem plani umbrandi cum horizonte, et xOy angulus quæsitus. Iamvero triangula rectangula xOy, $x\gamma y$, $y\gamma O$ præbent proportiones $Oy : yx :: 1 : \text{tang.}\, xOy$; $y\gamma : yx :: 1 : \text{tang.}\, x\gamma y$; $Oy : y\gamma :: 1 : \text{sin.}\, POS'$. A quibus, expunctis rectis Oy, yx, $y\gamma$, enascitur proportio a Regula præscripta $1 : \text{tang.}\, x\gamma y :: \text{sin.}\, POS' : \text{tang.}\, xOy$. Angulus ergo xOy per Regu-

lam prius inventus vero est angulo æqualis, quo intersectio plani verticalis, et plani umbrandi ad rectam, seu radium horizontalem F′S′ inclinatur: et cum directio præterea, et positio rectæ X x opportuna sit, uti vidimus; perpendicularis xy illa ipsa est, quæ in idem punctum y horizontis cadit ab umbra vera, quam punctum (11′) facit in plano; ac proinde y vera est ejus ichnographia.

2. Regula pro inveniendo occursus puncto (rr'), siquod est, radium inter ($F 3 h F' 3' S''$), et figuram planam ($a c a' c'$) super horizonte erectam eadem est, ac pæcedens. Hoc unum advertendum est, nos intersectionem non posuisse planæ figuræ cum horizonte, sed rectam eidem intersectioni parallelam per punctum ($O' n$) transeuntem. Cætera facile intelliguntur repetita præcedenti demonstratione.

3. Sphæra umbranda secetur plano verticali per radium ($F g F' g'$) transeunte. Sectio erit circulus minor, cujus diametrum exhibet chorda $g' g'$ ab ichnographia radii $F' g'$ in ichnographia sphæræ inscripta; centrum autem medio puncto d verticaliter imminebit ad eandem centri sphæræ (C D) altitudinem R C. Si ergo ducta indefinita $D c'$ perpendiculari ad $F' g'$, et capta $dc = $ R C, describo a centro c intervallo $d g'$ circulum $e c' u$; hic erit circulo minori, de quo agitur, æqualis. At erit idem ille circulus rotatione circa $F' g'$ in horizontem demissus. Occursus præterea radii veri, si qui locum habet, cum sphæra in circumferentia illa verticali cum necessario cadat; si ejus ortographiam v', ichnographiam v antea noveram; novum etiam ejus locum u facile reperio, posquam circumferentiæ eidem inhærens in horizontem cum ipsa devenit. Evidens enim est ipsum rotasse circa $F' g'$ perpendiculari suo pristino intervallo vu. Vicissim invento in circumferentia hac horizontali puncto u, cito perveniam ad puncta v, v', demissis perpendicularibus uv ad radium horizontalem, vv' ad tabulam. Jamvero punctum hoc non aliud esse potest, nisi occursus u circumferentiam inter eandem horizontalem; et horizontalem secantem Uu, quæ eandem teneat positionem, et directionem, quoad radii ichnographiam $F' g'$, quam tenet radius verus. At hoc præstant rectæ U F′, 2″ 2′ perpendiculares ad $F' g'$, et altitudini punctorum respondentium (F F′), (22′) æquales. Ergo ec.

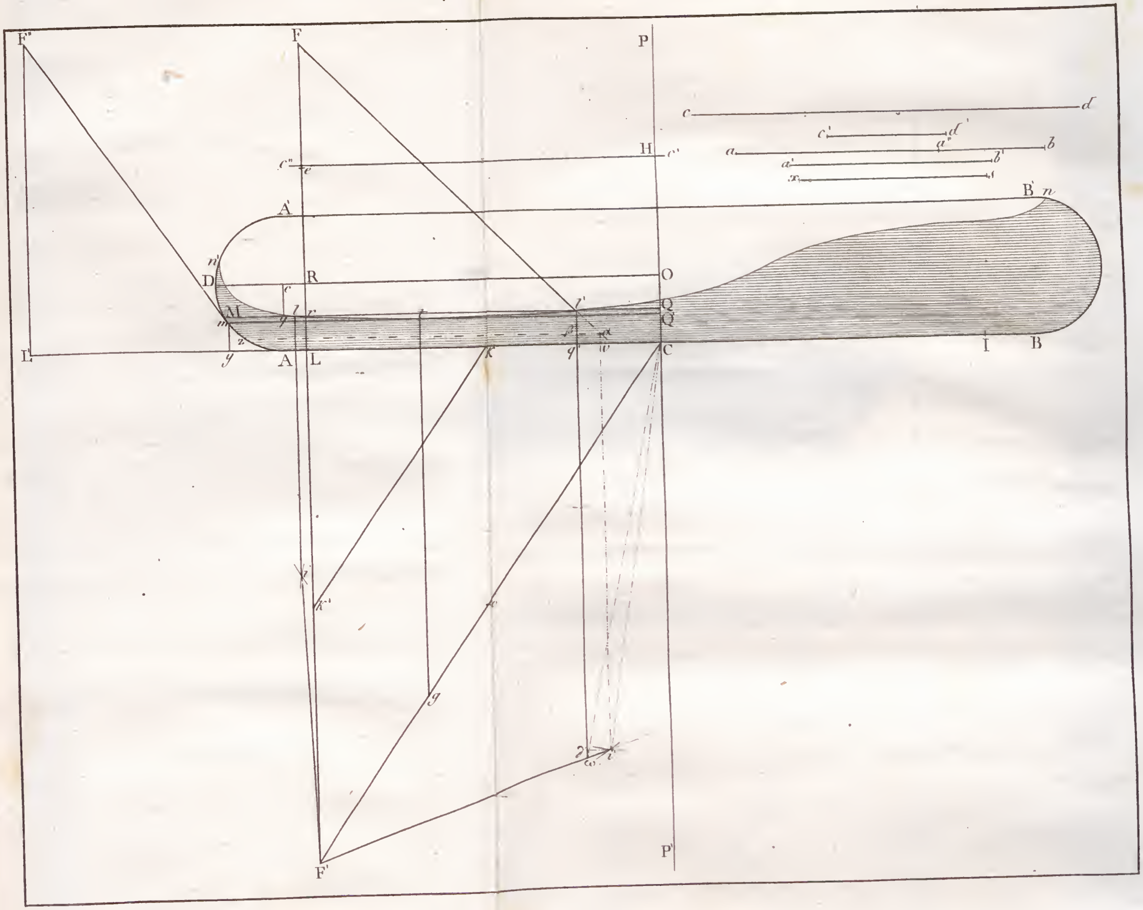
4. Regulæ pro Cono, et Cylindro veritas facile patebit, si concipias planum, quod transeat 1.° per verticem Coni, 2.° per radium verum assumptum. Nam planum hoc secabit Conum juxta latus ejus rectilineum, cui occurrit radius verus; ac proinde in eodem horizontis

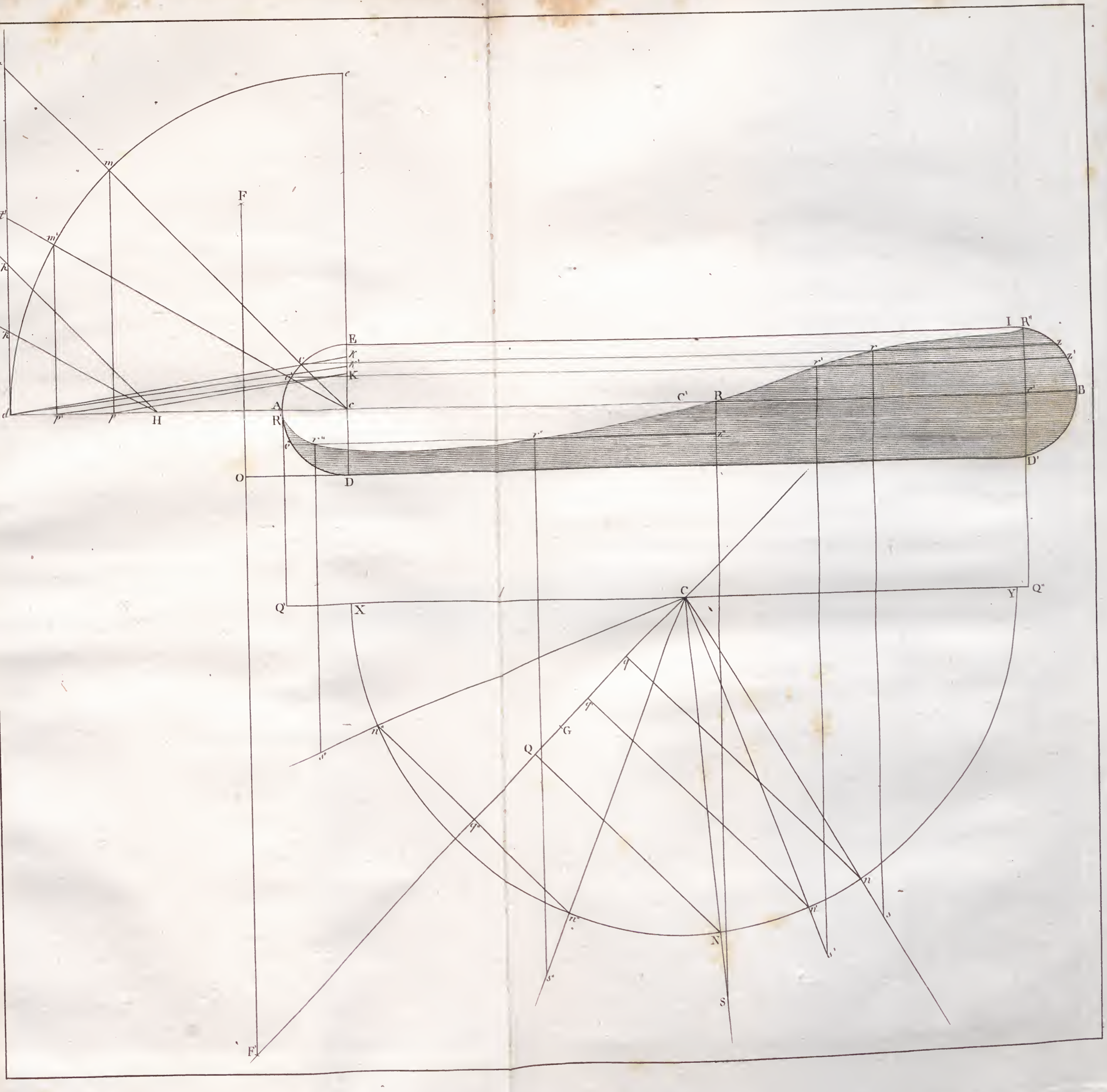
puncto r fiet triplex intersectio, plani scilicet ejusdem, lateris Coni, et perimetri ejus basis; ita ut ducta perpendiculari ad tabulam $r r'$, et ab r' ad verticem I recta $r' I$, hæc erit ortographia lateris Coni, ubi fit radii veri occursus quæsitus, cujus idcirco ortographia erit in puncto x, ubi secatur $F' h$. Restat ergo quærendum punctum hoc in basis Coni perimetro. In plano præcedenti positi sunt radii duo, verus nempe, de quo agitur, et radius per verticem Coni traductus. Ergo utriusque occursus puncta z, O cum horizonte erunt in recta ipsa, juxta quam planum secat horizontem. Atqui super hac ipsa linea recta situm est punctum, quod quærimus in basis Coni perimetro. Hoc ergo revera invenimus producendo, uti Regula præcipit, rectam, quæ puncta data O, z conjungit.

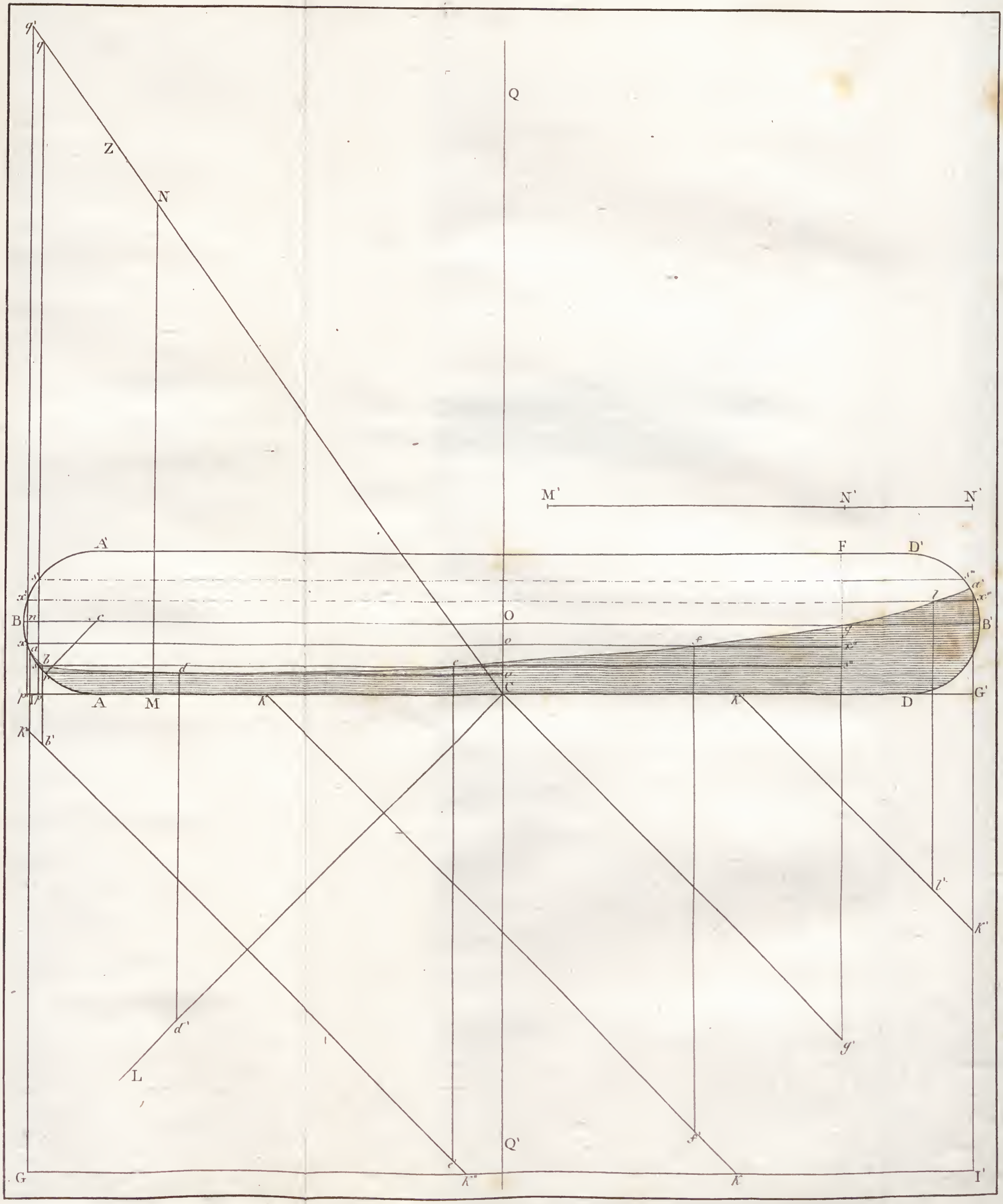
CONCLUSIO.

Finem hic impono investigationi, quam eo animo tantum suscepi, ut præcipua Architectonicæ delineationis problemata a cæteris scolasticis generalioris Geometriæ exercitationibus deprompta ad faciliora principia pertraherem, et ad solum normæ, et circini usum, quantum fieri posset, revocarem; atque appositum Graphicæ artis Studiosis offerrem opusculum, quo simul juvari in operando, et operandi rationes penitus intelligere possint. Utrum bene propositum successerit, quidve novi in re quidem non nova contulerim, quid generalius, quid facilius præstiterim, judicent Periti. Hoc unum Tirones monitos enixe volo, non eos hisce paucis, qualiacumque sint, acquiescere debere, sed optima quæque undique colligere, et mente adhuc, et oculo, et manu indefessa versare præstantissima Professoris Marconi præcepta, nitidissima Amati exemplaria, elegantes Bordoni constructiones, tum maxime Graphicas Descriptiones Mutinensis Professoris Tramontini, præclarum opus Geometria plenum, elegantia, atque utilissimis inventis, inter recentiora numerandum, quibus Italia Geometriam, quam prior Europæ vel divinando restituerat, suam se iterum fecisse gloriatur.

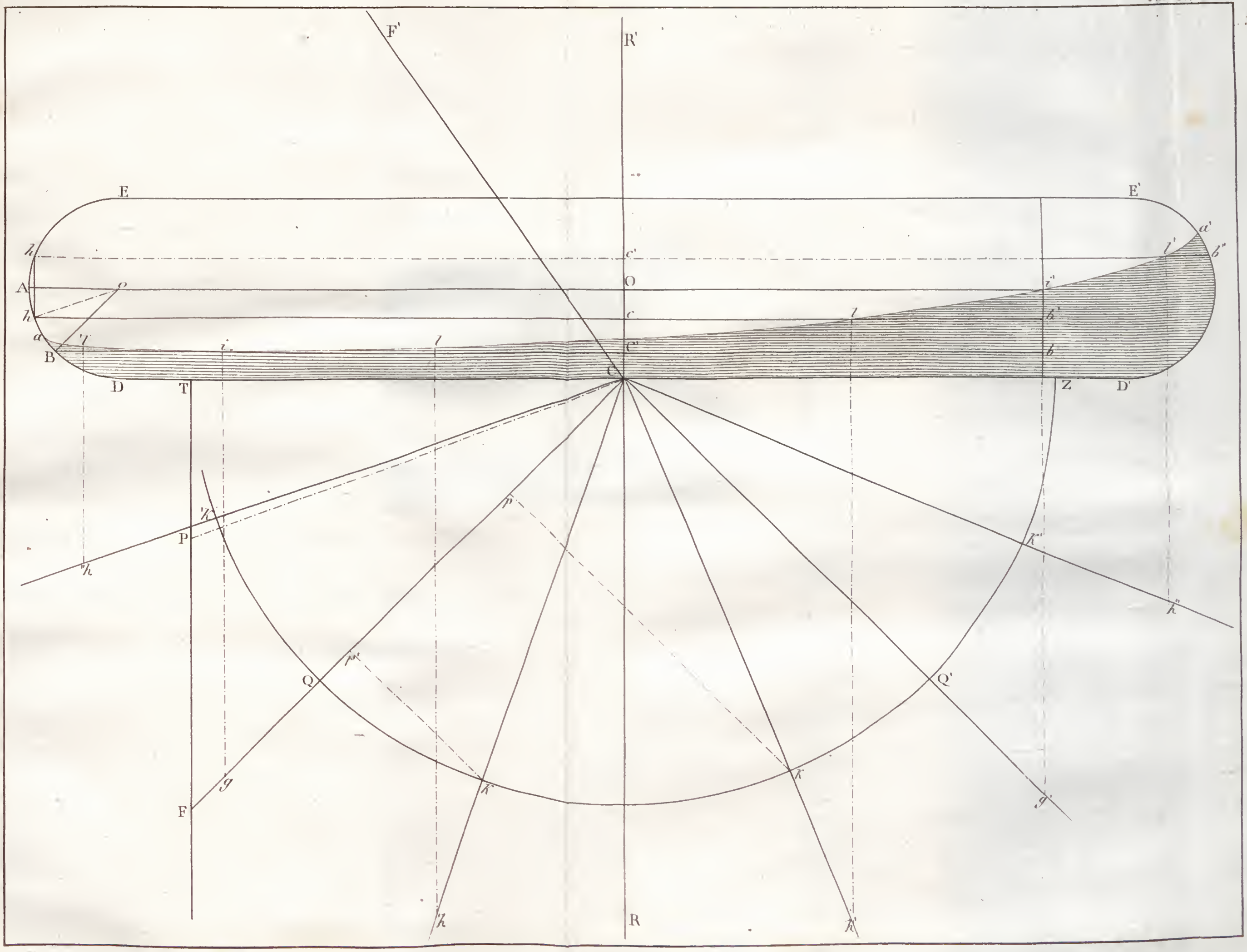
Tab. I.

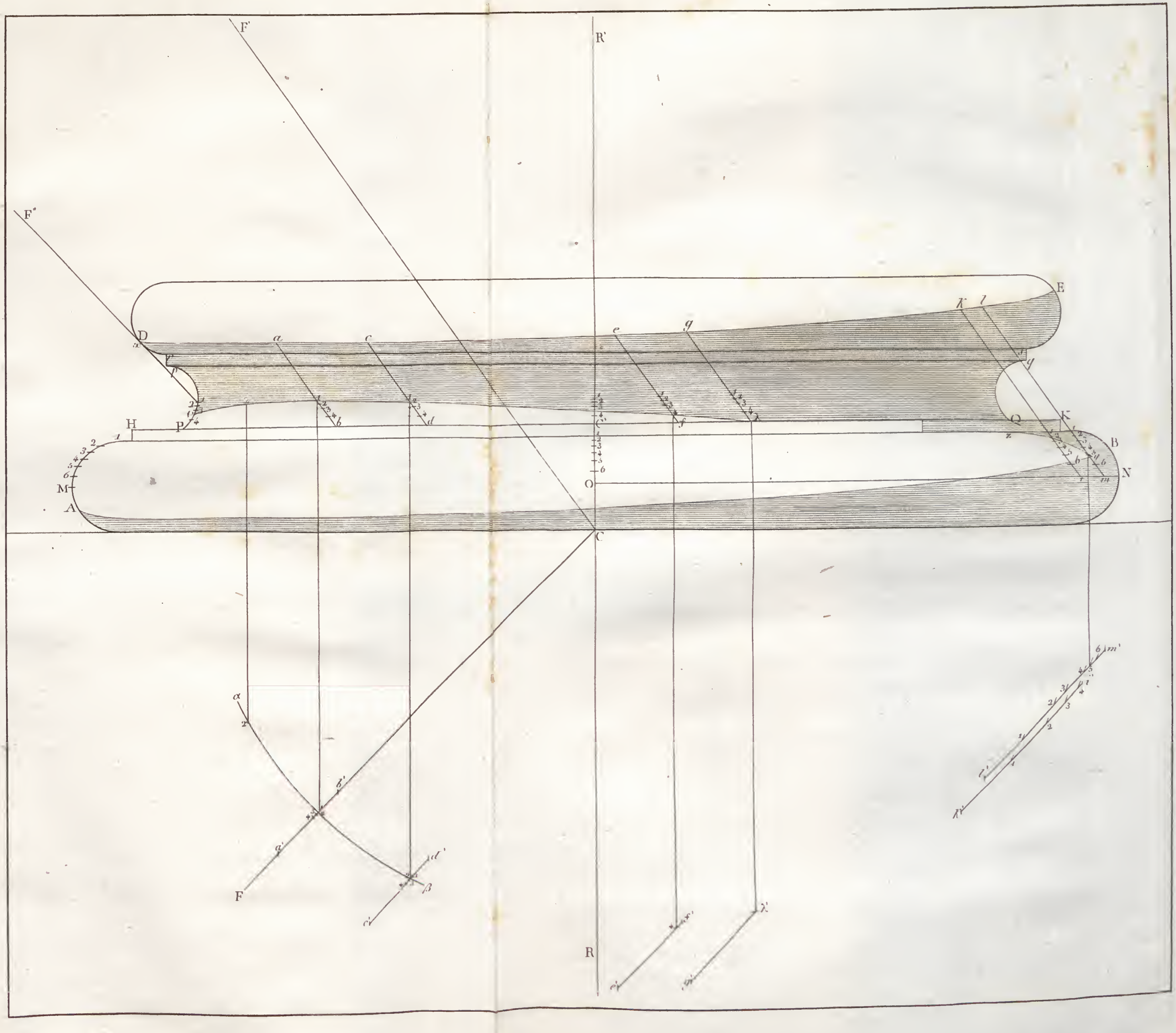



F
E
K
K'
K
A
R'
c
H
O
D
C'
R
I
R''
B
D'
C
Q'
X
Y
Q''
G
Q
N
S
F'
n
n'
n''
s
s'
s''
q
q'
q''
t
t'
m
m'
p
p'
d
e

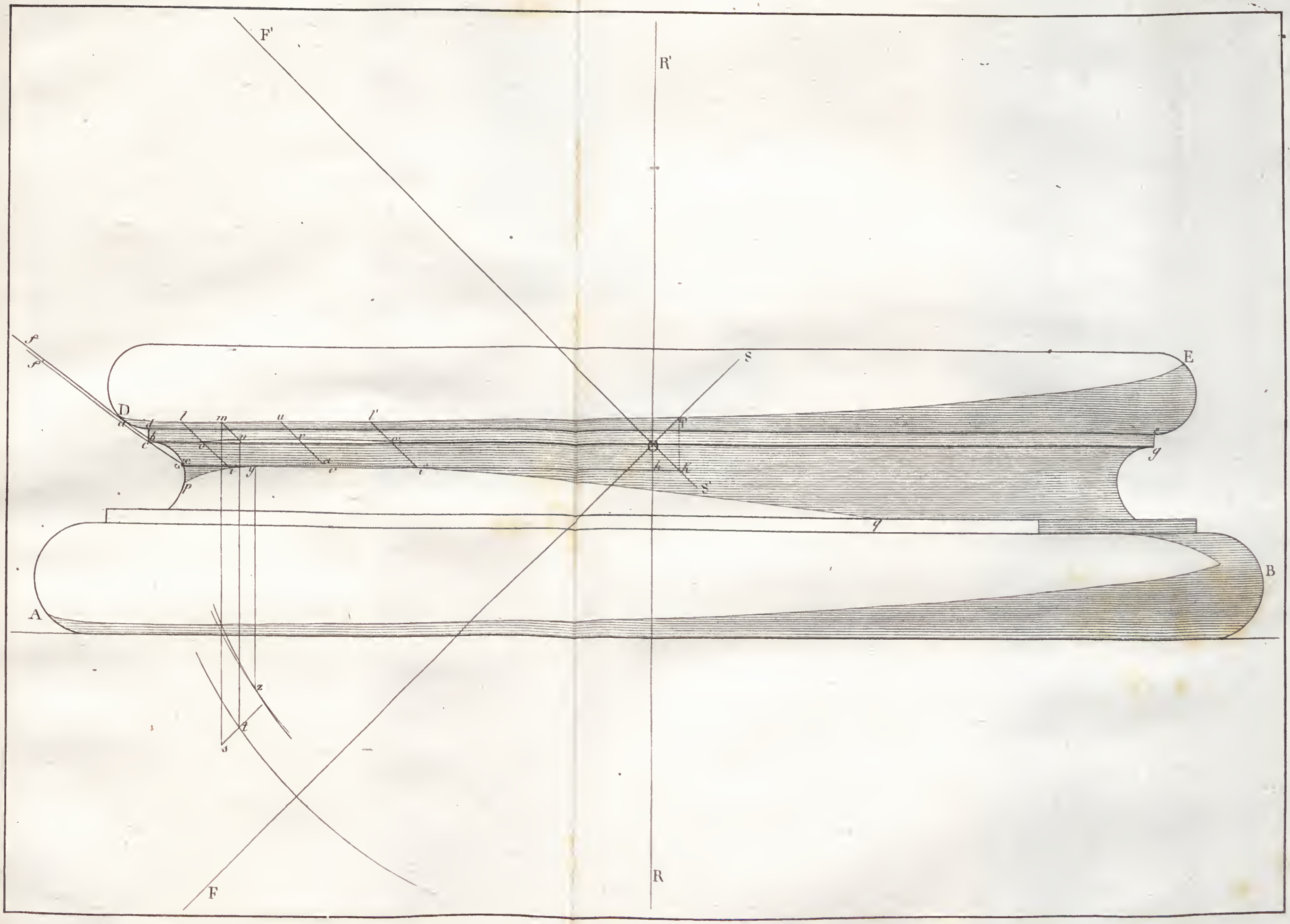

q'
q
Z
N
Q
O
o
M'
N'
N'
A'
F
D'
B
B'
C
A
M
D
G'
d'
L
g'
l'
Q'
G
I'

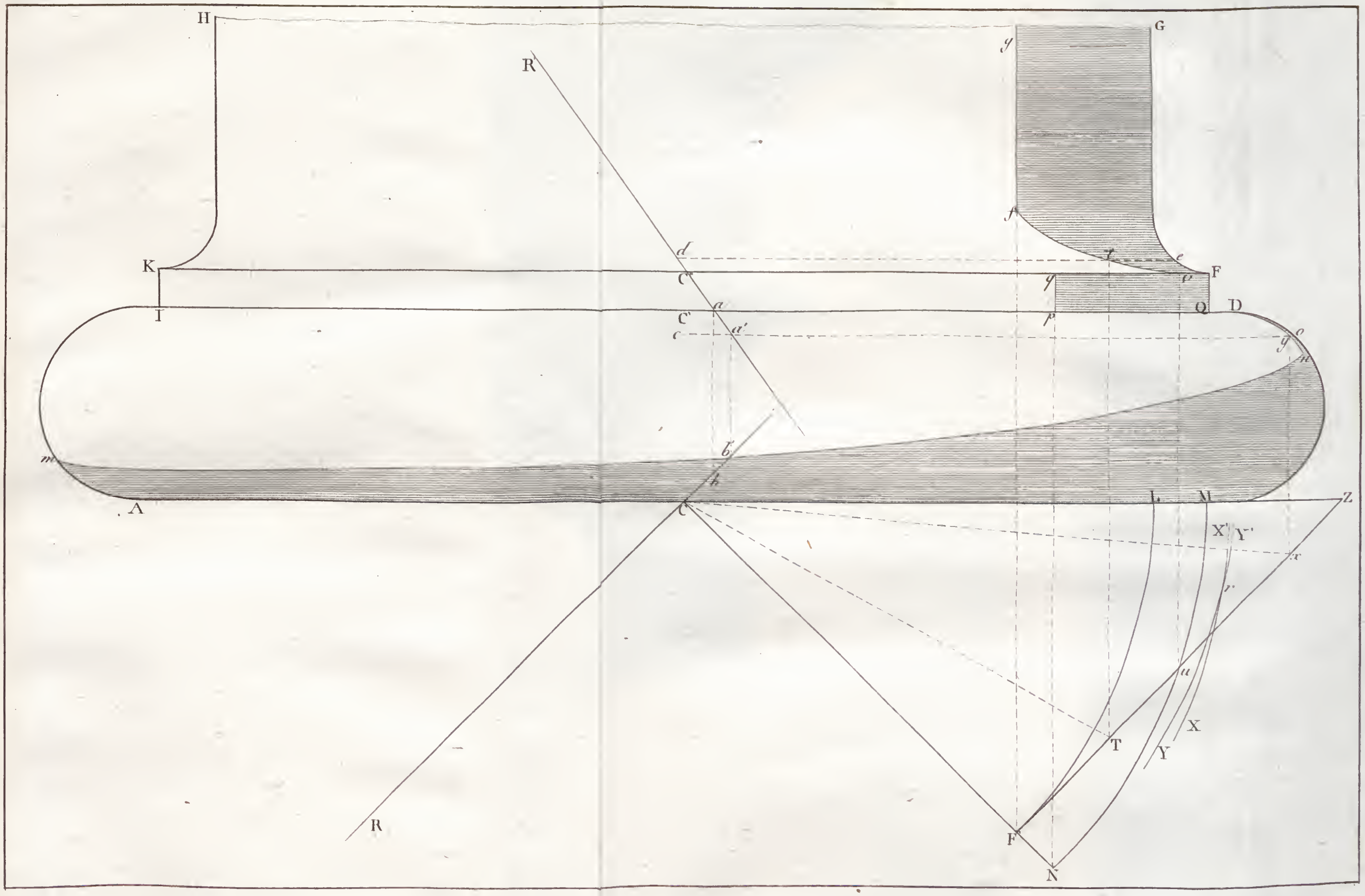
Tab. IV.

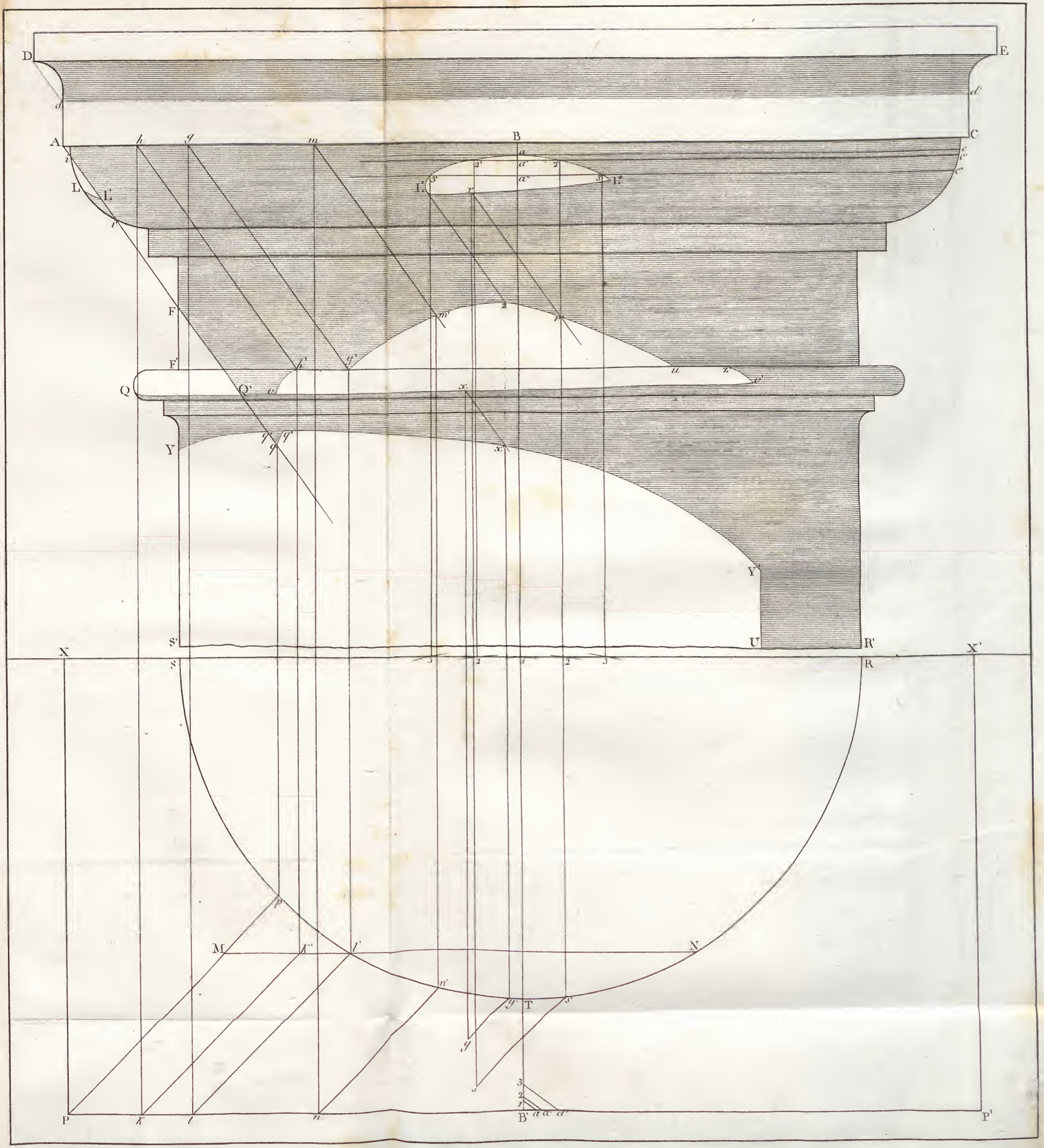



F'
F"
R'
D
E
a
c
e
g
K
l
H
P
C'
Q
B
N
M
A
O
C
α
β
F
R
λ'

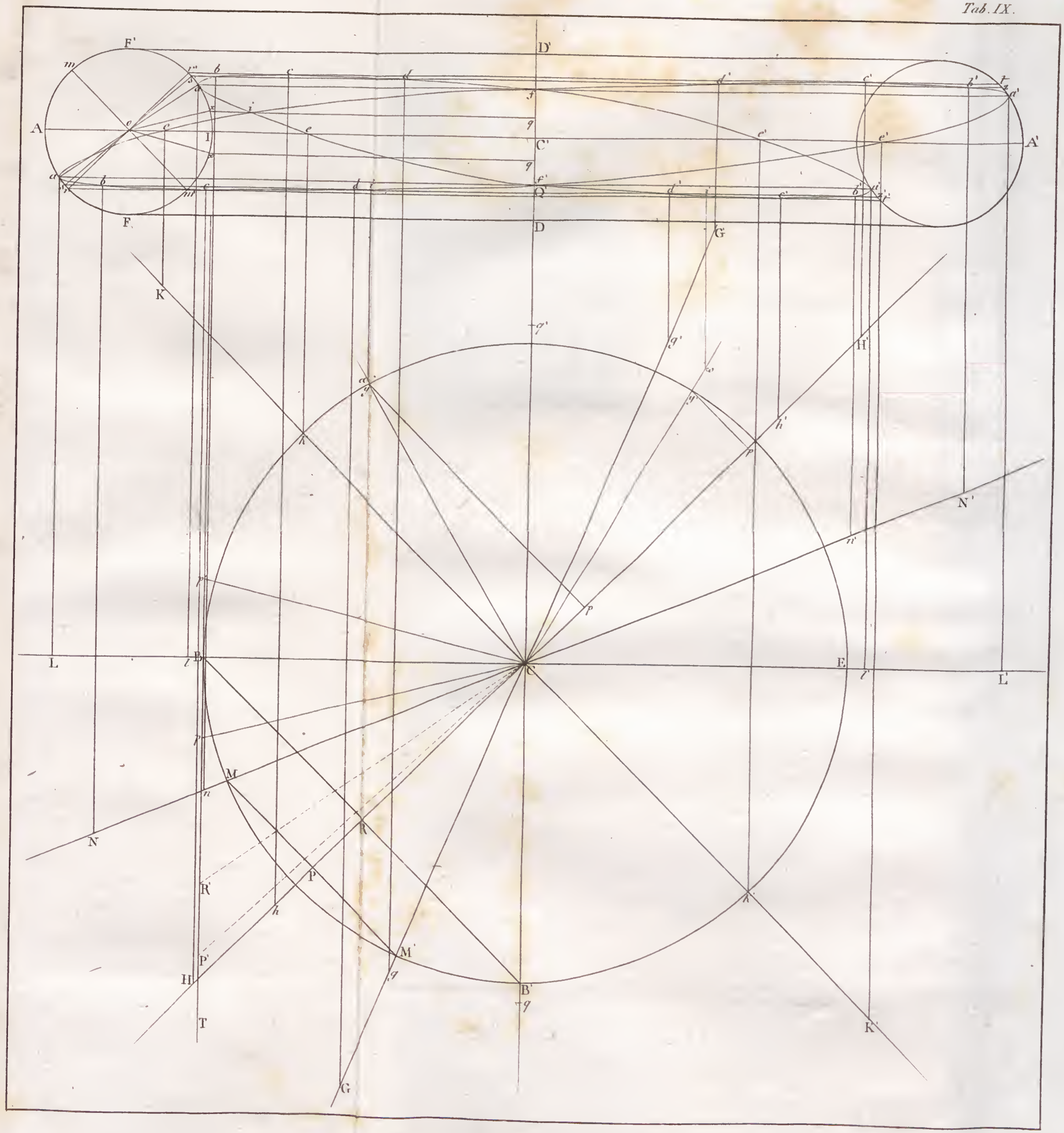
Tab. VI.

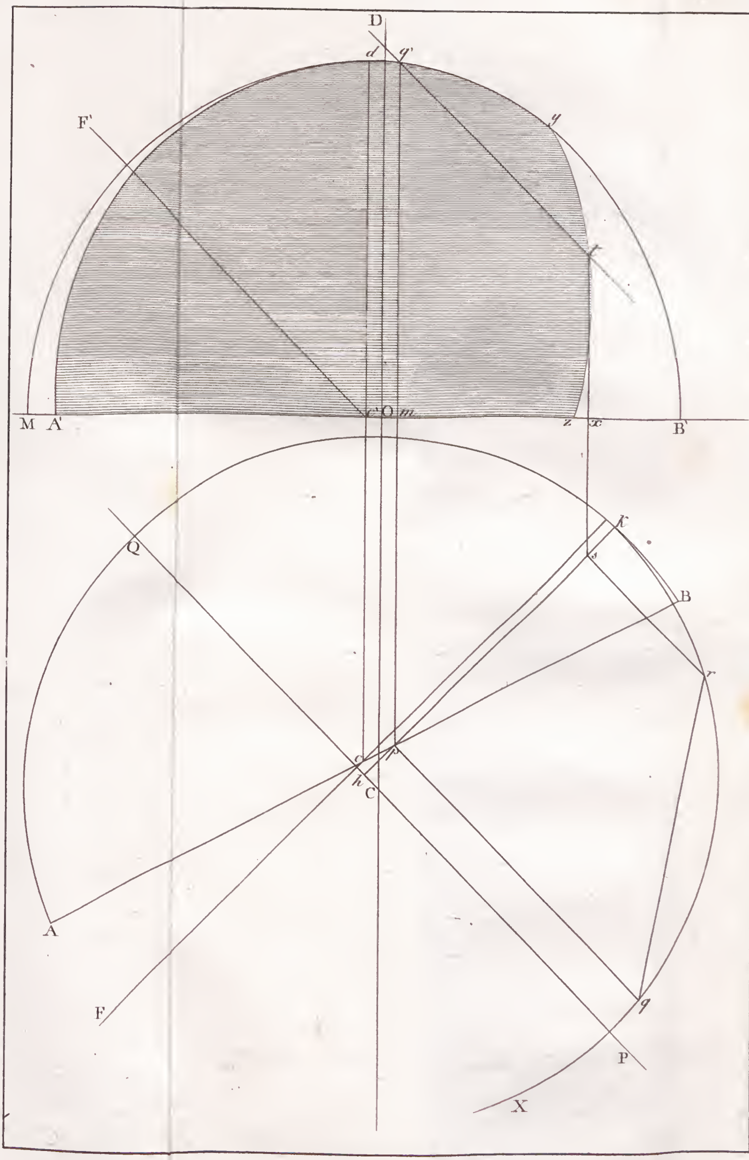


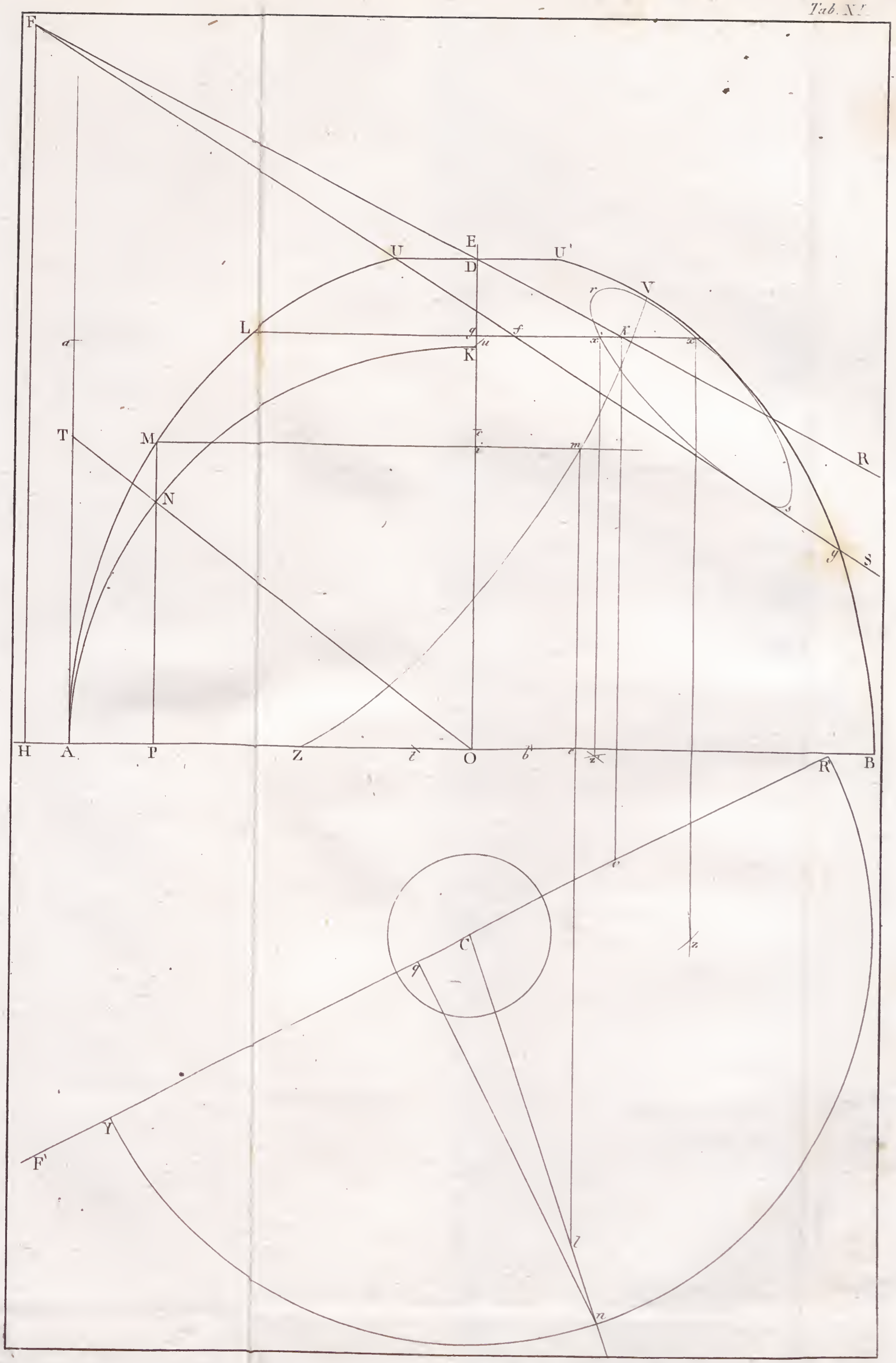

H
G
R
K
I
A
D
F
Q
Z
L
M
T
N
X
Y
R

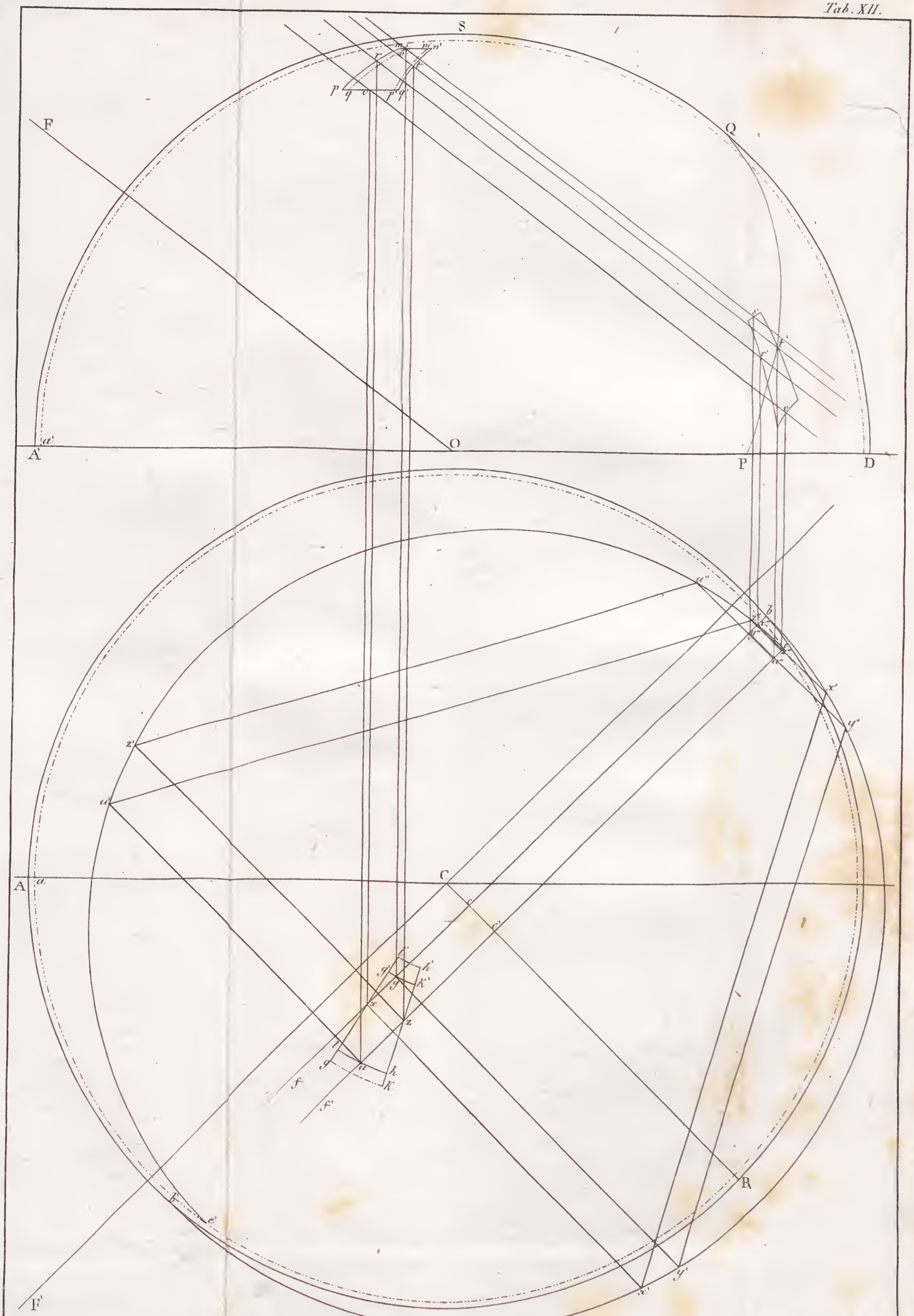


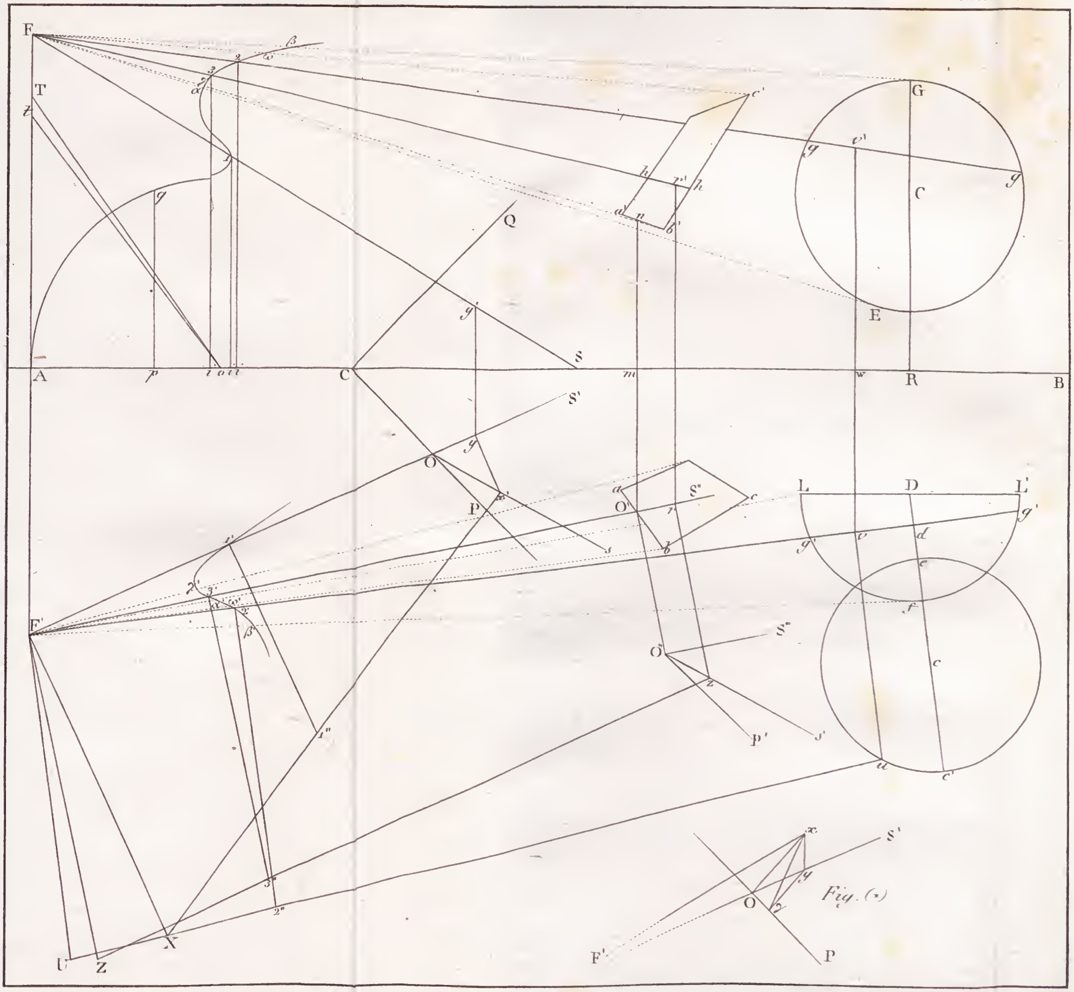
D
E
d
d'
A
h
g
m
B
C
a
a'
a''
c
c'
c''
i
L
L'
i'
F
F'
h'
q'
m'
r'
Q
Q'
u
z'
x
Y
q
q''
x'
Y'
S'
U
R'
X
S
R
X'
p
M
k'
l'
N
n'
y'
T
s'
y
P
k
l
n
B'
P'

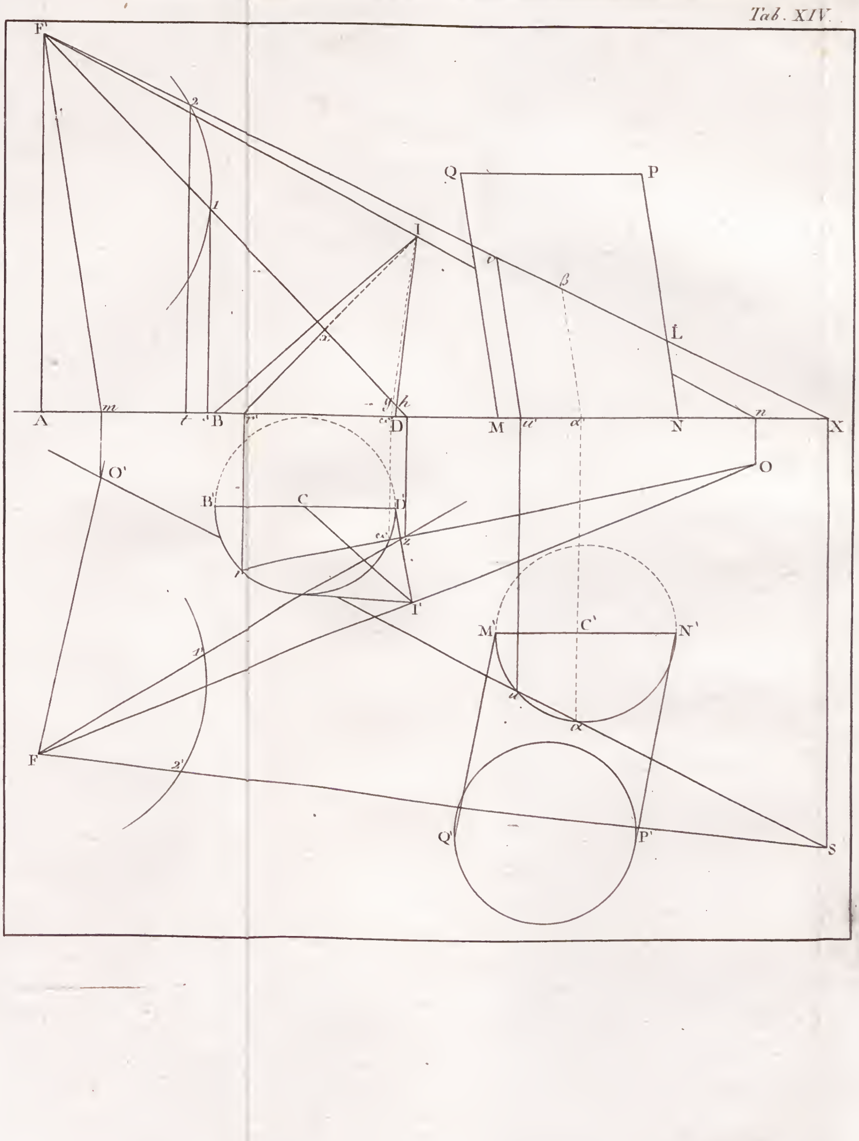

F'
D'
A
C'
A'
F
D
G'
K
H'
N'
E
L
B
C
L'
M
N
R
R'
P
P'
H
M'
B'
T
K'
G


D
d
q'
y
F'
t
M
A'
c'
O
m
z
x
B'
k
Q
s
B
r
c
p
h
C
A
F
q
P
X


F
E
U
U'
D
V
L
K
T
M
N
R
S
H
A
P
Z
O
B
R'
C
Y
F'


S
F
Q
A'
a'
O
P
D
C
A
a
R
F'


F
T
t
A
C
Q
S
G
C
E
R
B
S'
O
P
L
D
L'
S"
F'
O'
O"
S'''
P'
U
Z
X
Fig. (*)
x
O
F'
P
S'


F'
A
m
t
B
D
M
N
n
X
O'
O
Q
P
I
L
C
C'
M'
N'
B'
D'
T'
F
Q'
P'
S